Министерство образования и науки Хабаровского края
Краевое государственное образовательное учреждение
среднего профессионального образования
«Хабаровский машиностроительный техникум»

Учебно-методическая разработка

«Элементы линейной алгебры»

по учебной дисциплине
«Элементы высшей математики»

Хабаровск 2014

Одобрены на заседании ПЦК «Математических и естественнонаучных дисциплин»
«____»_______________2014 г.
Протокол №__
Председатель ПЦК__________ Т.А. Новикова

Утверждаю
Зам. директора по УВР
____________ И.Н. Пухляр
«____»____________2014 г.

Учебно-методическая разработка по учебной дисциплине «Элементы высшей математики» предназначена для студентов КГБОУ СПО «Хабаровский машиностроительный техникум» специальности 230111 «Компьютерные сети» по теме «Элементы линейной алгебры» и может использоваться как для аудиторных занятий, так и для самостоятельной работы. В разработке содержатся краткие теоретические сведения о матрицах, определителях и системах линейных уравнений, большое количество примеров с решениями и задания для самостоятельного овладения материалом, применение программы MS Excel. Составлено преподавателем КГБОУ СПО ХМТ Богдановой Т.С.

Содержание

Пояснительная записка

Учебно-методическая разработка (разработка) разработана в соответствии с ФГОС СПО специальности 230111 «Компьютерные сети», рабочим учебным планом и рабочей программой учебной дисциплины «Элементы высшей математики» для студентов дневной формы обучения специальности 230111 «Компьютерные сети», однако, может быть использовано и студентами других форм обучения.

Рабочий учебный план, предусматривает изучение курса элементов высшей математики в течение 2 семестров.

Данная разработка предназначена в помощь студентам в тех случаях, когда какие-либо лекции были пропущены, в чем-то трудно разобраться по другим учебникам или имеется потребность в изучении материала за ограниченное время при отсутствии «консультантов».

В учебно-методической разработке включен конспект лекций по дисциплине в кратком изложении. При изложении теоретической части использовался принцип «достаточной полноты при максимально возможной простоте представления учебного материала». По этой причине в некоторых местах изложение ведется недостаточно строго в математическом плане, однако, достаточно строго для использования аппарата высшей математики. Практически весь теоретический материал сопровождается примерами и решением типовых задач.

При самостоятельном изучении представленного в разработке материала рекомендуется кроме рабочих записей постепенно формировать глоссарий-справочник, в который следует заносить основные формулы, правила, соотношения и определения используемых математических понятий. Впоследствии такой глоссарий-справочник может быть использован при выполнении контрольных и самостоятельных работ, а также при изучении общепрофессиональных и специальных дисциплин в последующих семестрах обучения.

В разработку включены контрольные вопросы по теоретической части.

Элементы линейной алгебры

Алгебра - раздел математики, изучающий операции, аналогичные сложению, вычитанию, умножению и делению, и выполнимые не только над числами, но и над другими математическими объектами.

В центре внимания алгебры оказываются свойства операций, а не объекты, над которыми производятся операции.

Лекция 1. Матрицы

План:

1. Матрицы. Основные понятия.
2. Действия над матрицами.
   2.1. Сложение.
   2.2. Умножение на число
   2.3. Произведение матриц.

Цели занятия:

На занятии вы узнаете

- Понятие матрицы, квадратной матрицы, треугольной матрицы, единичной матрицы, нулевой матрицы, транспонированной матрицы, противоположной матрицы, элементы матрицы, главной и побочной диагонали,
- Сложения матриц, умножение матрицы на число, произведение матриц,
- Свойства операции сложения матриц и умножения матрицы на число, произведения матриц,

Порядок работы на занятии:

1. Прочитать текст лекции или прослушать лекцию преподавателя.
2. Законспектировать лекцию.
3. Ответить на контрольные вопросы, не заглядывая в конспект.
4. Проверьте свои ответы по конспекту.
5. Если ответы ошибочны, еще раз прочитайте лекцию и ответьте на контрольные вопросы. Будьте готовы к устному опросу и к применению знаний на практических занятиях.

1. Матрицы. Основные понятия

Алгебра – одна из составных частей современной математики. Название алгебра происходит от названии книги арабского математика Мухаммеда аль Хорезми «Ал-д жабр…»

Основной задачей алгебры было решение алгебраических уравнений, а так же систем уравнений и как особо важный случай, систем линейных уравнений. Для решения последних были введены понятия матрицы и определители, которые в последствии стали самостоятельными объектами изучения. Указанный материал впоследствии стал относиться к высшей алгебре.

Матрицей называется множество чисел, образующих прямоугольную таблицу, которая содержит m строк и n столбцов.

Матрица записывается в виде $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ или, сокращенно А = (a_{ij}),

где i=1, 2, 3,…,m означает номер строки, j=1,2,3,…,n – номер столбца.

Матрицу А называют матрицей размера m×n и пишут $A_{m\times n}$. Числа a_{ij}, составляющие матрицу, называются ее ***элементами***.

Матрицы равны между собой, если равны соответствующие элементы этих матриц, т.е. A=B, если $a_{ij} = b_{ij}$, где i=1,2,3,…,m, j=1,2,3,…,n

Матрица, у которой число строк равно числу столбцов, называется ***квадратной***. Квадратную матрицу размера $n \times n$ называют ***матрицей n-го порядка***.

Рассмотрим квадратную матрицу порядка n: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$

Элементы, стоящие на диагонали, идущей из левого верхнего угла $(a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn})$, образуют ***главную диагональ***, а элементы стоящие на диагонали, идущей из правого верхнего угла $(a_{1n}, a_{2,n-1}, ..., a_{n1})$, образуют ***побочную диагональ***.

<u>Пример.</u> $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ квадратная матрица 3-го порядка.

Квадратная матрица, у которой все элементы, кроме элементов главной диагонали, равны нулю, называется ***диагональной***.

<u>*Пример.*</u> A=$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ диагональная матрица n-го порядка.

Диагональная матрица, у которой каждый элемент главной диагонали равен единице, называется ***единичной***. <u>Обозначается буквой Е.</u>

<u>*Пример*</u>. $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ единичная матрица 3-го порядка.

Матрица, все элементы которой равны нулю, называется ***нулевой***. <u>Обозначается буквой О.</u> Имеет вид О=$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$

Матрица, содержащая один столбец или одну строку, называется ***вектором*** (или вектор-столбец, или вектор-строка соответственно). А=$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}$ B=$\begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{pmatrix}$

Квадратная матрица называется ***треугольной***, если все элементы, расположенные по одну сторону от главной диагонали, равны нулю.

Матрица, полученная из данной заменой каждой ее строки столбцом с тем же номером, называется матрицей ***транспонированной*** к данной. Обозначается A^T.

Транспонированная матрица обладает следующим свойством: $\left(A^T\right)^T = A$. Так, если $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 5 & 0 & 8 \\ -8 & 7 & 3 \end{pmatrix}$, то $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -8 \\ -3 & 0 & 7 \\ 4 & 8 & 3 \end{pmatrix}$

2. Действия над матрицами

2.1. Сложение матриц

Операция сложения вводится только для матриц одинаковых размеров.

Суммой двух матриц А = (a_{ij}) и В = (b_{ij}) называется матрица С = (c_{ij}) элементы, которой равны сумме соответствующих элементов матриц А и В, т.е $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, где i=1,2,3,…,m, j=1,2,3,…,n.

Пример 1. $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 \\ -2 & -5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 10 \end{pmatrix}$

Аналогично определяется разность матриц.

2.2. Умножение матрицы на число

Произведением *матрицы А на число k* называется матица kA, каждый элемент которой равен ka_{ij} , i=1,2,3,…,m, j=1,2,3,…,n. т.е.

если А=$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$, то kA=$\begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \dots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \dots & ka_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \dots & ka_{mn} \end{pmatrix}$

Умножение матрицы на число сводится к умножению на это число всех элементов матрицы.

Пример 2. $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, k=2

$$kA=\begin{pmatrix} 4 & -8 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$$

Матрица –А =(-1)·А называется ***противоположной*** матрице А. Разность матриц А-В можно определить так: А-В=А+(-В).

Операция сложения матриц и умножения матрицы на число обладают следующими свойствами:

1. переместительный закон сложения A+B=B+A,
2. сочетательный закон сложения (A+B)+C=A+(B+C),
3. A+O=A;
4. для любой матрицы A существует матрица –A, такая, что A+(-A)=0, т.е. матрица, противоположная A;
5. 1·A=A;
6. α·(A+B)=αA+αB;
7. (α+β)·A=αA+βA;
8. α·(βA)=(αβ)·A.

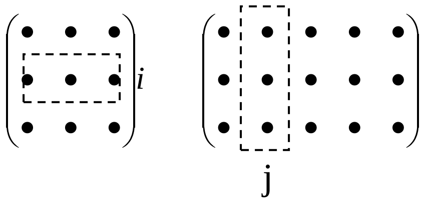
где где A, B, C - либо квадратные матрицы одного порядка n, либо прямоугольные матрицы одно размера m×n, а α и β – числа.

2.3. Произведение матриц

Операция умножения матриц вводится только для случая, когда число столбцов первой матрицы равно числу строк второй матрицы.

Произведением матрицы $A_{m\times n}$ на матрицу $B_{n\times p}$ называется матрица $C_{m\times p}$ такая, что $c_{ik} = a_{i1}\cdot b_{1k} + a_{i2}\cdot b_{2k} + ... + a_{1n}\cdot b_{nk}$, где $i = 1,2,\ldots,m$, $k = 1,2,\ldots,p$.

Получение элемента c_{ik} схематично изображается так:



Вообще, чтобы получить элемент, стоящий на пресечении i-ой строки и j-го столбца матрицы произведения, нужно все элементы i-ой строки $(a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in})$ матрицы A умножить на соответствующие элементы j-го столбца $(b_{1j}, b_{2j}, \ldots, b_{nj})$ матрицы B и полученные произведения сложить.

Если матрицы A и B произвольного размера, то произведения AB и BA не всегда существуют.

Рассмотрим умножение квадратных матриц второго порядка. Пусть $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$. Произведением этих матриц называется матрица

$$C = AB = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$$

чтобы найти элемент c_{11} первой строки и первого столбца матрицы C, нужно каждый элемент первой строки матрицы A (т.е. a_{11} и a_{12}) умножить на соответствующий элемент первого столбца матрицы B (т.е. b_{11} и b_{21}) и полученные произведения сложить: $c_{11} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21}$;

чтобы получить элемент c_{12} первой строки и второго столбца матрицы C, нужно умножить все элементы первой строки (a_{11} и a_{12}) на соответствующие элементы

второго столбца (т.е. b_{12} и b_{22}) и полученные произведения сложить: $c_{12} = a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22}$;
аналогично находится элементы c_{21} и c_{22}.

Если матрицы А и В квадратные одного размера, то произведения АВ и ВА всегда существуют. Легко доказать, что А·Е=Е·А=А, где А-квадратная матрица, Е- единичная матрица того же размера.

Пример 3. Найти произведение матриц А и В, если

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Решение. Так как матрица $A_{3\times3}$ и матрица $B_{3\times3}$, то матрица произведения $AB_{3\times3}$ и содержит 9 элементов. Найдем каждый элемент матрицы-произведения:

$$c_{11} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} = 3\cdot1 + 1\cdot2 + 1\cdot1 = 6$$
$$c_{12} = a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} = 3\cdot1 + 1\cdot(-1) + 1\cdot0 = 2$$
$$c_{13} = a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} + a_{13}b_{33} = 3\cdot(-1) + 1\cdot1 + 1\cdot1 = -1$$
$$c_{21} = a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} = 2\cdot1 + 1\cdot2 + 2\cdot1 = 6$$
$$c_{22} = a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} = 2\cdot1 + 1\cdot(-1) + 2\cdot0 = 1$$
$$c_{23} = a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} + a_{23}b_{33} = 2\cdot(-1) + 1\cdot1 + 2\cdot1 = 1$$
$$c_{31} = a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} + a_{33}b_{31} = 1\cdot1 + 2\cdot2 + 3\cdot1 = 8$$
$$c_{32} = a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} + a_{33}b_{32} = 1\cdot1 + 2\cdot(-1) + 3\cdot0 = -1$$
$$c_{33} = a_{31}b_{13} + a_{32}b_{23} + a_{33}b_{33} = 1\cdot(-1) + 2\cdot1 + 3\cdot1 = 4$$

$$C = \begin{pmatrix} 6 & 2 & -1 \\ 6 & 1 & 1 \\ 8 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Пример 3. Найти произведение матриц А и В, если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Решение. Произведение матриц А·В не определенно, так как число столбцов матрицы А (3) не совпадает с числом строк матрицы В (2). При этом определенно произведение В·А: Так как матрица $A_{2\times3}$ и матрица $B_{2\times2}$, то матрица произведения $BA_{2\times3}$ и содержит 6 элементов.

$$\text{B·A}=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+9 & 2+3 & 1+0 \\ 1+6 & 2+2 & 1+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 5 & 1 \\ 7 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Умножение матриц обладают следующими свойствами:

1. А·(В·С)= (А·В)·С;
2. А·(В+С)=АВ+АС;
3. (А+В)·С=АС+ВС;
4. α(АВ)=(αА)В.
5. $AB \neq BA$

Контрольные вопросы

1. Что называется матрицей?
2. Что называется матрицей – строкой? Матрицей – столбцом?
3. Какие матрицы называются прямоугольными? Квадратными?
4. Какие матрицы называются равными?
5. Что называется главной диагональю матрицы?
6. Какая матрица называется диагональной?
7. Какая матрица называется единичной?
8. Какая матрица называется треугольной?
9. Что значит «Транспонировать» матрицу?
10. Что называется суммой матриц?
11. Что называется произведением матрицы на число?
12. Как найти произведение двух матриц?
13. В чем состоит обязательное условие существование произведения матриц?
14. Какими свойствами обладает произведение матриц

Практическая работа № 1.
Действия над матрицами

Цели занятия:

К занятию надо знать.

- Понятие матрицы, квадратной матрицы, прямоугольной матрицы.
- Условия сложения и произведения матриц.
- Сложения матриц, умножение матрицы на число, произведение матриц.
- Свойства операции сложения матриц, умножения матриц на число, произведения матриц,

На занятии надо научиться:

- Складывать матрицы.
- Умножать матрицы на число.
- Вычислять произведения двух матриц.

Порядок работы на занятии:

1. Повторить условия сложения и произведения матриц.
2. Повторить сложения матриц, умножение матрицы на число, произведение матриц.
3. Рассмотреть образец решения (пример 1, лекция «действия над матрицами»).
4. Выполнить задание 1.
5. Рассмотреть образец решения (пример 2, лекция «действия над матрицами»).
6. Выполнить задание 2, 3, 4, 5, 6 (домашнее задание не менее 2 примеров указывает преподаватель)
7. Рассмотреть образец решения (пример 3, лекция «действия над матрицами»).
8. Выполнить задание 7, 8, 9 (домашнее задание не менее 4 примеров указывает преподаватель)
9. Выполненные задания покажите преподавателю. Возможен устный опрос.

Задание 1. Сложить матрицы A и В, если:

а) $A=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$

б) $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -4 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

в) $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & 4 & 8 \end{pmatrix}$

Задание 2. Умножить матрицу $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 5 & -3 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ на число k=3.

Задание 3. Найти матрицу, противоположную матрице А=$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 5 \\ -4 & 3 & 7 \end{pmatrix}$

<u>Задание 4.</u> Найти линейную комбинацию 3A-2B, если

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 \\ -1 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & -7 \end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 \\ 0 & -3 & 5 \\ 2 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

<u>Задание 5.</u> Вычислить линейную комбинацию матриц 2A-B, если

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -6 & 1 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix} -5 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

<u>Задание 6.</u> Вычислить линейную комбинацию матриц 2A+3B-C, если

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}, \qquad C=\begin{pmatrix} -7 & -4 \\ 18 & -8 \end{pmatrix}$$

<u>Задание 7.</u> Найти произведение матриц AB, если:

а) $A=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

б) $A=\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

в) $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

г) $A=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 3 & 7 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

д) $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

<u>Задание 8.</u> Вычислить а) $C=A^2+2B$, б) $C=AB-BA$, где

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

<u>Задание 9.</u> Найти $3A\cdot 2B$, если $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \ B=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

Лекция 2.
Определители

План:

1. Определители. Основные понятия.
2. Основные свойства определителей.
3. Миноры и алгебраические дополнения элементов определителя.

Цели занятия:

На занятии вы узнаете

- Понятие определителя 2-го порядка, определителя 3-го порядка, минора, алгебраического дополнения.
- Формулировки свойств определителя.
- Формулировку теоремы «о разложении определителя по элементам строки или столбца».
- Схему вычисления определителя 2-го порядка.
- Формулировку правило Саррюса (схема треугольников).

Порядок работы на занятии:

1. Прочитать текст лекции или прослушать лекцию преподавателя.
2. Законспектировать лекцию.
3. Ответить на контрольные вопросы, не заглядывая в конспект.
4. Проверьте свои ответы по конспекту.
5. Если ответы ошибочны, еще раз прочитайте лекцию и ответьте на контрольные вопросы. Будьте готовы к устному опросу и к применению знаний на практических занятиях.

1. Определители. Основные понятия

Определитель – это число, которое по специальным правилам вычисляется для каждой квадратной матрицы

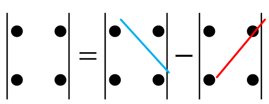
Пусть дана квадратная матрица второго порядка: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

Определителем (или ***детерминантом***) *второго порядка* называется число $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$. Определитель второго порядка записывается так: detA=$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

Определитель второго порядка равен разности попарных произведений элементов главной и побочной диагонали.

Определитель квадратной матрицы порядка n можно_обозначить_также Δ или $|\,\mathrm{A}\,|$.

Вычисление определителя 2-го порядка иллюстрируется схемой:



<u>Пример 1</u>. Найти определители матриц:

а) $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$

Решение.

a) $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}$=2·6-(-3)·5=27

b) $\begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix} = \cos\alpha\cdot\cos\alpha - \sin\alpha\cdot(-\sin\alpha) = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$

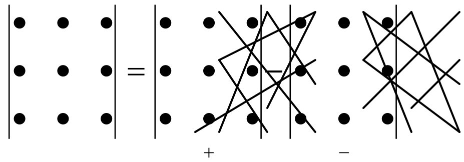
Пусть дана квадратная матрица третьего порядка: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

Определителем 3-го порядка, соответствующим данной матрице, называется число $a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$

Определитель третьего порядка записывается так:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

Чтобы запомнить, какие произведения в правой части берутся со знаком «+», а какие со знаком «-», полезно использовать следующее *правило треугольников* (*правилом Саррюса*), которое символически можно записать так:



Пример 2. Вычислить определитель матрицы $A = \begin{vmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -4 \\ 6 & 0 & -3 \end{vmatrix}$

Решение.

detA=5·1·(-3)+3·0·1+(-2)·(-4)·6-1·1·6-5·(-4)·0-3·(-2)·(-3)=-15+0+48-6-0-18=9

2. Основные свойства определителей

1. «Равноправность строк и столбцов». Определитель матрицы не изменится, если его строки заменить столбцами, и наоборот (т.е. транспонировать)
2. При перестановке двух строк (или столбцов) определитель изменит свой знак на противоположный: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix}$
3. Определитель с двумя одинаковыми строками или столбцами равен нулю. $\begin{vmatrix} 12 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 12 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$
4. Общий множитель всех элементов строки (или столбца) можно вывести за знак определителя: $\begin{vmatrix} a_{11} & ka_{12} \\ a_{21} & ka_{22} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$
5. Если все элементы двух строк (столбцов) определителя пропорциональны, то определитель равен нулю.

6. Если к какой-либо строке (или столбцу) определителя прибавить соответствующие элементы другой строки (или столбца), умноженные на одно и то же число, то определитель не изменит своей величины: $\begin{vmatrix} a_{11}+ka_{12} & a_{12} \\ a_{21}+ka_{22} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$

7. Если элементы какого-либо строки (столбца) определителя представляют собой сумму двух слагаемых, то определитель может быть разложен на сумму двух соответствующих определителей: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}+b \\ a_{21} & a_{22}+c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & b \\ a_{21} & c \end{vmatrix}$

8. Треугольный определитель, у которого все элементы, лежащие выше (или ниже) главной диагонали, - нули, равен произведению элементов лавной диагонали: $\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}$

3. Миноры и алгебраические дополнения элементов определителя

Минором M_{ij} некоторого элемента a_{ij} определителя n-го порядка называется определитель n-1-го порядка, полученный из исходного путем вычеркивания строки и столбца, на пересечении которых находится выбранный элемент.

Например, Минор M_{12} , соответствующий элементу a_{12} определителя $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$, получается, если вычеркнуть из определителя D первую строку и второй столбец, т.е. $M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$.

Пример 3. Записать все миноры определителя $D = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 9 & 6 \\ -7 & 5 & -3 \end{vmatrix}$

Решение.

$M_{11} = \begin{vmatrix} 9 & 6 \\ -3 & 5 \end{vmatrix}$, $M_{12} = \begin{vmatrix} 0 & 6 \\ -7 & -3 \end{vmatrix}$, $M_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 9 \\ -7 & 5 \end{vmatrix}$,

$M_{21} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -3 \end{vmatrix}$, $M_{22} = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -7 & -3 \end{vmatrix}$, $M_{23} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -7 & 5 \end{vmatrix}$,

$M_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 9 & 6 \end{vmatrix}$, $M_{32} = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 6 \end{vmatrix}$, $M_{33} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 9 \end{vmatrix}$.

Алгебраическим дополнением элемента a_{ij} определителя называется минор M_{ij} этого элемента, взятый со знаком $(-1)^{i+j}$. Алгебраическое дополнение элемента a_{ij} принято обозначать A_{ij}.

Таким образом, $\boxed{A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}}$.

Знаки алгебраического дополнения A_{ij}: $\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$

<u>Пример 4</u>. Найти алгебраические дополнения элементов a_{13}, a_{32}, a_{12} определителя $D = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 9 & 6 \\ -7 & 5 & -3 \end{vmatrix}$.

<u>Решение</u>.

$$A_{13} = +M_{13} = (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 9 \\ -7 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 9 \\ -7 & 5 \end{vmatrix} = 0 \cdot 5 - 9 \cdot (-7) = 0 + 63 = 63$$

$$A_{32} = -M_{32} = (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} = -((-1) \cdot 6 - 3 \cdot 0) = -(-6 - 0) = 6$$

$$A_{12} = -M_{12} = (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 6 \\ -7 & -3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & 6 \\ -7 & -3 \end{vmatrix} = -(0 \cdot (-3) - 6 \cdot (-7)) = -(0 + 42) = -42.$$

Теорема. <u>*«О разложении определителя по элементам строки или столбца»*</u>. *Сумма произведений элементов любой строки (или столбца) определителя D на их алгебраические дополнения равна этому определителю, т.е.*

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in} \quad \text{или} \quad D = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj}.$$

Эти соотношения называются разложением определителя по элементам i-ой строки или j-го столбца.

Для разложения определителя обычно выбирают тот ряд, где есть нулевые элементы, т.к. соответствующие им слагаемые в разложении будут равны нулю.

<u>Пример 5</u>. Определитель $D = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 9 & 6 \\ -7 & 5 & -3 \end{vmatrix}$ разложить:

1. по элементам второй строки;

2. по элементам первого столбца.

<u>Решение</u>.

$$D = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} = 0 \cdot (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} + 9 \cdot (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -7 & -3 \end{vmatrix} + 6 \cdot (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -7 & 5 \end{vmatrix} =$$

1. $$= 0 + 9 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -7 & -3 \end{vmatrix} - 6\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -7 & 5 \end{vmatrix} = 9((-1) \cdot (-3) - 3 \cdot (-7)) - 6((-1) \cdot 5 - 2 \cdot (-7)) =$$

$$= 9(3 + 21) - 6(-5 + 14) = 9 \cdot 24 - 6 \cdot 9 = 216 - 54 = 162$$

$$D = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31} = (-1) \cdot (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 9 & 6 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} + (-7) \cdot (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 9 & 6 \end{vmatrix} =$$

2. $$= (-1) \cdot \begin{vmatrix} 9 & 6 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} + 0 + (-7)\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 9 & 6 \end{vmatrix} = (-1)(9 \cdot (-3) - 6 \cdot 5) + (-7)(2 \cdot 6 - 3 \cdot 9) =$$

$$= -(-27 - 30) - 7(12 - 27) = -(-57) - 7 \cdot (-15) = 57 + 105 = 162$$

Если определитель имеет четвертый или более высокий порядок, то его также можно разложить по элементам строки или столбца.

Пример 6. Вычислить определитель матрицы $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 & 8 \\ -1 & 7 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 7 & 4 \end{pmatrix}$

Решение. Разложим определитель по элементам 1-го столбца.

$$\det A = 3\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 7 & 0 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \\ -1 & 7 & 4 \end{vmatrix} + (-1)\cdot(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 5 & 7 & 8 \\ 5 & 3 & 2 \\ -1 & 7 & 4 \end{vmatrix} + 0\cdot(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 5 & 7 & 8 \\ 7 & 0 & 1 \\ -1 & 7 & 4 \end{vmatrix} + (-1)^{4+1}\begin{vmatrix} 5 & 7 & 8 \\ 7 & 0 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 3(7\cdot 3\cdot 4 + 5\cdot 7\cdot 1 + 0\cdot 2\cdot(-1) - 1\cdot 3\cdot(-1) - 2\cdot 7\cdot 7 - 5\cdot 0\cdot 4) + (5\cdot 3\cdot 4 + 5\cdot 7\cdot 8 + 7\cdot 2\cdot(-1) - 8\cdot 3\cdot(-1)$$

$$- 2\cdot 5\cdot 7 - 5\cdot 7\cdot 4) - (5\cdot 0\cdot 2 + 7\cdot 3\cdot 8 + 7\cdot 1\cdot 5 - 8\cdot 0\cdot 5 - 5\cdot 1\cdot 3 - 7\cdot 7\cdot 2) =$$

$$= 3(84 + 35 + 0 + 3 - 98 - 0) - (60 + 280 - 14 + 24 - 70 - 140) + (0 + 168 + 35 - 0 - 15 - 98) =$$

$$= 3\cdot 24 + 140 - 90 = 72 + 140 - 90 = 122$$

Перечислим различные способы вычисления определителей.

1. Определитель можно вычислить, используя непосредственно его определение. Этим способом удобно находить определители 2-го и 3-го порядков (треугольник Саррюса), а для определителя более высокого порядка применим следующий способ.

2. Определитель можно вычислить с помощью его разложения по элементам строки или столбца.

3. Определитель можно вычислить способом приведения к треугольному виду. Этот способ основан на том, что в силу свойства 8 треугольный определитель равен произведению элементов главной диагонали.

Чтобы получить треугольный определитель, нужно используя свойство 6, к какой-либо строке (или столбцу) заданного определителя прибавлять соответствующие элементы другой стоки (или столбца), умноженные на одно и тоже число, до тех пор пока не придем к определителю треугольного вида.

Контрольные вопросы

1. Что называется определителем матрицы?
2. Как вычислить определитель третьего порядка по схеме треугольников?
3. Что называется минором?
4. Что называется алгебраическим дополнением элемента определителя?
5. Как разложить определитель по элементам столбца или строки?
6. Какие способы вычисления определителя вам известны?
7. Перечислите свойства определителей.

Практическое занятие № 2.
Вычисление определителя n-го порядка

Цели занятия:

К занятию надо знать.

- Понятие определителя 2-го, 3-го порядка, минора, алгебраического дополнения.
- Формулировку теоремы «о разложении определителя по элементам строки или столбца».
- Схему вычисления определителя 2-го порядка.
- Формулировку правила Саррюса.

На занятии надо научиться:

- Находить определитель 2-го порядка.
- Находить определитель 3-го порядка.
- Находить определитель 4-го порядка.

Порядок работы на занятии:

1. Повторить понятие определителя 2-го и 3-го порядка, минора, алгебраического дополнения.
2. Повторить схему вычисления определителя 2-го порядка, правило Саррюса.
3. Рассмотреть образец решения (пример 1, лекция «основные понятия»).
4. Выполнить задание 1.
5. Рассмотреть образец решения (пример 2, лекция «основные понятия»).
6. Выполнить задание 2 (домашнее задание не менее 2 примеров указывает преподаватель).
7. Рассмотреть образцы решения (пример 3, 4, 5, 6, лекция «Миноры и алгебраические дополнения элементов определителя»).
8. Выполнить задание 3, 4 (домашнее задание не менее 2 примеров указывает преподаватель)
9. Выполненные задания покажите преподавателю. Возможен устный опрос.

Задание 1. Вычислить определители 2-го порядка:

А) $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}$

Б) $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & -10 \end{vmatrix}$

В) $\begin{vmatrix} \sqrt{a} & -1 \\ a & \sqrt{a} \end{vmatrix}$

Г) $\begin{vmatrix} a+1 & b-c \\ a^2+a & ab-ac \end{vmatrix}$

Задание 2. Вычислить определители 3-го порядка:

А) $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix}$

Б) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 5 & 0 & -1 \end{vmatrix}$

В) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \end{vmatrix}$

Г) $\begin{vmatrix} a & 1 & a \\ -1 & a & 1 \\ a & -1 & a \end{vmatrix}$

Задание 3. Вычислить определители 4-го порядка:

А) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 6 & 1 \end{vmatrix}$

Б) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 6 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 5 \end{vmatrix}$

В) $\begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & -4 & -8 \\ -1 & -3 & -9 & -27 \\ -1 & -4 & -16 & -64 \end{vmatrix}$

Г) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -4 & 3 \\ 3 & -4 & -1 & -2 \\ 4 & 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}$

Задание 4. Решить уравнения:

А) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & x \\ 4 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 0$

В) $\begin{vmatrix} 3 & x & -4 \\ 2 & -1 & 3 \\ x+10 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$

Лекция 3.
Обратная матрица. Ранг матрицы

План:
1. Обратная матрица.
2. Ранг матрицы.

Цели занятия:

На занятии вы узнаете

- Понятие обратной матрицы, ранга матрицы.
- Правило вычисления обратных матриц второго и третьего порядков.
- Свойства обратной матрицы.

Порядок работы на занятии:
1. Прочитать текст лекции или прослушать лекцию преподавателя.
2. Законспектировать лекцию.
3. Ответить на контрольные вопросы, не заглядывая в конспект.
4. Проверьте свои ответы по конспекту.
5. Если ответы ошибочны, еще раз прочитайте лекцию и ответьте на контрольные вопросы. Будьте готовы к устному опросу и к применению знаний на практических занятиях.

1. Обратная матрица

Пусть A – квадратная матрица n-го порядка $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$

Квадратная матрица A^{-1} порядка n называется обратной матрицей для данной матрицы A, если $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$, где $-$ E единичная матрица.

Квадратная матрица A называется ***вырожденной***, если ее определитель detA равен 0 т.е detA=0.

В противном случае (detA≠0) матрица A называется ***невырожденной***.

Обратная матрица A^{-1} имеет те же размеры, что и матрица A.

Теорема. Всякая невырожденная матрица A имеет обратную матрицу A^{-1}, определяемую формулой $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$

где A_{11}, A_{12}, …, A_{nn} есть алгебраические дополнения соответствующих элементов a_{11}, a_{12},…, a_{nn} матрицы A.

Правило вычисления обратных матриц n-го порядка

1. Находят определитель матрицы A т.е. detA.

2. Находят алгебраические дополнения всех элементов a_{ij} матрицы A.

3. Умножают полученную транспонированную матрицу на $\frac{1}{\det A}$.

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

Нахождение обратной матрицы имеет большое значения при решении систем линейных уравнений и в вычислительных методах линейного программирования.

Свойства обратной матрицы

1. $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det A}$;
2. $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$;
3. $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$.

Пример 1. Дана матрица А = $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, найти A^{-1}.

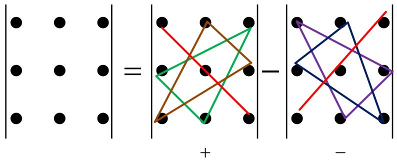
Решение.

1. det A = 4 - 6 = -2.
2. $A_{11}=4$; $A_{12}= -3$; $A_{21}= -2$; $A_{22}=1$
3. Таким образом, $A^{-1} = \dfrac{1}{-2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$

Пример 2. Найти матрицу A^{-1}, если $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Решение.

1. Вычислим определитель матрицы А (по правилу треугольников):



$\det A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} - 6 + 0 + 0 - 0 - 1 - 0 = 5$, так как определитель det=5≠0, то матрица А невырожденная и имеет обратную матрицу A^{-1}.

2. Вычислим алгебраические дополнения всех элементов матрицы А по формуле $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$.

Знаки алгебраического дополнения A_{ij}: $\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$

$A_{11} = +M_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5$ $A_{12} = -M_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 0$ $A_{21} = -M_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -4$

$A_{13} = +M_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$ $A_{22} = +M_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2$

$$A_{23} = -M_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \qquad A_{32} = -M_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

$$A_{31} = +M_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2 \qquad A_{33} = M_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3$$

3. Подставляя найденные значения в формулу для A^{-1} получим:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{4}{5} & \frac{2}{5} \\ 0 & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

2. Ранг матрицы

Рассмотрим матрицу А размера $m \times n$. $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$. Выделим в ней k строк и k столбцов ($k \le \min(m;n)$). Из элементов, стоящих на пересечении выделенных строк и столбцов, составим определитель k-го порядка. Все такие определители называются ***минорами этой матрицы***.

Наибольший из порядков миноров данной матрицы, отличных от нуля, называется рангом матрицы. Обозначается r, r(A), rangA.

Очевидно, что $0 \le r \le \min(m;n)$, где $\min(m;n)$ - меньшее из чисел m и n.

Минор, порядок которого определяет ранг матрицы, называется ***базисным***.

У матрицы может быть несколько базисных миноров.

Пример 1. Дана матрица $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 & 8 \\ 0 & 1 & 4 & 6 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & 10 \end{pmatrix}$. Определить ее ранг.

Решение. Имеем $M_1 = |1| \ne 0$, $M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \ne 0$, $M_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \ne 0$. Минор 4-го порядка составить нельзя.

Ответ: rangA=3.

Матрицы, имеющие одинаковый ранг, называются **эквивалентными**. Эквивалентность матриц обозначается знаком ~ между ними. Записывается A~B.

Надо отметить, что **равные** матрицы и **эквивалентные** матрицы - понятия совершенно различные.

Отметим свойства ранга матрицы:

1. При транспонировании матрицы ее ранг не меняется.
2. Если вычеркнуть из матрицы нулевой ряд, то ранг матрицы не изменится.
3. Ранг матрицы не изменится при элементарных преобразованиях матрицы.

Элементарными преобразованиями называются такие преобразования, при которых миноры матрицы либо не меняют своей величины, либо, меняя величину, не обращаются в нуль.

Элементарные преобразования матриц позволяют:

1. Переставлять местами между собой строки (столбцы).

2. Прибавлять к какой-либо строке (столбцу) другую строку (столбец), умноженную на любое число.

3. Умножать строку (столбец) на число, отличное от нуля.

4. Вычеркивать строки (столбцы), состоящие из одних нулей.

Простейший способ определения ранга матрицы состоит в приведении ее к ступенчатому виду при помощи последовательности элементарных преобразований.

Для этого необходимо с помощью элементарных преобразований привести исходную матрицу к диагональному виду

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2k} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3k} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{kk} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

где $a^{ij} = 0$ при $i > j$; $a^{ij} \neq 0$ при $i = j$.

Пример 2. Определить ранг матрицы.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 11 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 11 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 11 \end{pmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 11 \end{vmatrix} = 11 - 10 = 1 \neq 0 \Rightarrow$$ rangA = 2.

Пример 3. Определить ранг матрицы $\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 8 & 1 \\ 7 & 4 & -2 & 1 & 5 \\ 4 & 2 & -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

Переставим первый и второй столбец местами: $\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 8 & 1 \\ 7 & 4 & -2 & 1 & 5 \\ 4 & 2 & -1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \sim$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 8 & 1 \\ 4 & 7 & -2 & 1 & 5 \\ 2 & 4 & -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Чтобы иметь дело с меньшими числами, умножим первый столбец на $\frac{1}{2}$:

$$\sim\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 8 & 1 \\ 2 & 7 & -2 & 1 & 5 \\ 1 & 4 & -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Первую строку прибавляем ко второй и третьей, умножая при этом на (-2) и на (-1) соответственно: $\sim\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 8 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & -15 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & -10 & 2 \end{pmatrix}$.

Умножим вторую строку на $\frac{1}{3}$, получим: $\sim\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 8 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -10 & 2 \end{pmatrix}$.

Умножим вторую строку на (-2) и прибавим ее к третьей строке: $\sim\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 8 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Вычеркиваем третью строку: $\sim\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 8 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & 1 \\ & & & & \end{pmatrix}$.

Отсюда видно, что ранг матрицы равен rang=2.

Контрольные вопросы

1. Какая матрица называется обратной по отношению к данной?
2. Каков порядок вычисления обратной матрицы?
3. Что называется рангом матрицы?
4. Какая матрица называется невырожденной?
5. Перечислите свойства обратной матрицы.

Лекция 4.
Системы линейных уравнений

План:

1. Основные понятия.
2. Решение невырожденных линейных систем формулами Крамера**.**
3. Решение систем линейных уравнений матричным методом
4. Решение систем линейных уравнений методом Гаусса.

Цели занятия:

На занятии вы узнаете

- Понятие системы линейных алгебраических уравнений, основной матрицы, расширенной матрицы, совместной и несовместной системы, однородной, матричного уравнения.
- Формулировку теоремы Крамера.
- Формулы Крамера.
- В каком случае система линейных уравнений не имеет решения или имеет бесчисленное множество решения.
- Правило решения матричного уравнения.
- Процесс решения систем линейных уравнений по методу Гаусса.

Порядок работы на занятии:

1. Прочитать текст лекции или прослушать лекцию преподавателя.
2. Законспектировать лекцию.
3. Ответить на контрольные вопросы, не заглядывая в конспект.
4. Проверьте свои ответы по конспекту.
5. Если ответы ошибочны, еще раз прочитайте лекцию и ответьте на контрольные вопросы. Будьте готовы к устному опросу и к применению знаний на практических занятиях.

1. Основные понятия

Системой линейных алгебраических уравнений, содержащей m уравнений и n неизвестных, называется система вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (1)$$

где числа a_{11}, a_{12},…, a_{mn}, называются *коэффициентами* системы или коэффициентами при неизвестных.

Первый индекс у коэффициентов системы указывает на номер уравнения, второй на номер неизвестного, при котором записан этот коэффициент.

Числа b_1, b_2,…, b_m называются свободными членами. Система линейных уравнений называется ***однородной***, если все свободные члены равны нулю, если же, хотя бы одно из них отлично от нуля, то **неоднородной**.

Решением системы (1) называется любая совокупность чисел x_1, x_2, x_3,…,x_n - подстановка которой в (1) обращает каждое уравнение этой системы в верное числовое равенство. Система, имеющая хотя бы одно решение, называется **совместной**, имеющая только одно решение **определенной**, имеющая более одного решения - **неопределенной**, не имеющая ни одного решения - **несовместной**.

Решить систему (1) - это значит указать все множество ее решений или доказать ее несовместность.

Систему (1) удобно записать в компактной <u>матричной форме A·X=B</u>. Здесь A – матрица коэффициентов системы, называемая ***основной матрицей***:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},\ X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$ - вектор-столбец из неизвестных x_j, $B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ - вектор-столбец из свободных членов b_i.

Произведение матриц A·X определено, так как в матрице A столбцов столько же, сколько строк в матрице X (n штук).

Расширенной матрицей *системы* называется матрица $\overline{A}$ системы, дополненная столбцом свободных членов $\overline{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22}\dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots\dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2}\dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$,

2. Решение линейных систем формулами Крамера.

Пусть дана система n линейных уравнений с n неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases}$$ или в матричной форме A·X=B. Основная матрица такой системы квадратная.

Определитель этой матрицы $\det A=\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$ называется ***определителем системы***. Если определитель системы отличен от нуля, то система называется ***невырожденной***.

Теорема Крамера. *Система n уравнений с n неизвестными, определитель которой отличен от нуля, всегда имеет решение и притом единственное, и это решение находится по формулам:*

$$x_1=\frac{\Delta_{x1}}{\det A},\ x_2=\frac{\Delta_{x2}}{\det A},\ x_3=\frac{\Delta_{x3}}{\det A},\ \dots,\ x_n=\frac{\Delta_{xn}}{\det A}$$

где Δ_{xi} – определитель матрицы, получаемой из матрицы системы заменой столбца i столбцом свободных членов b_i.

<u>Оно находится следующим образом</u>: значение каждого из неизвестных равно дроби, знаменателем которой является определитель системы, а числитель получается из определителя системы замены столбца коэффициентов при искомом неизвестном на столбец свободных членов.

<u>Пусть</u> $\Delta \neq 0$. Если в определителе системы заменить поочередно столбцы коэффициентов при $x_1, x_2, \ldots, x_n$ на столбец свободных членов, то получим n определителей (для n неизвестных)

$$\Delta_{x1} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_n & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}, \ \Delta_{x2} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & b_n & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}, \ \ldots, \ \Delta_{xn} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & b_n \end{vmatrix}$$

Тогда <u>формулы Крамера</u> для решения системы n линейных уравнений с n неизвестными запишутся так: $x_1 = \frac{\Delta_{x1}}{\Delta}$, $x_2 = \frac{\Delta_{x2}}{\Delta}, \ldots$, $x_n = \frac{\Delta_{xn}}{\Delta}$, или короче $x_i = \frac{\Delta_{xi}}{\Delta}$, где i=1, 2, …, n.

Рассмотрим случай, когда <u>*определитель системы равен нулю*</u>. Здесь возможны два варианта:

1. $\Delta = 0$ и каждый определитель $\Delta_{xi} = 0$. Это имеет место только тогда. Когда коэффициенты при неизвестных x_i пропорциональны, т.е. каждое уравнение системы получается из первого уравнения умножением обеих его частей на число k. Очевидно что при этом система имеет *бесчисленное множество решений*.

2. $\Delta = 0$ и хотя бы один из определителей $\Delta_{xi} \neq 0$. Это имеет место только тогда, когда коэффициенты при неизвестных, кроме x_i, пропорциональны. При этом получается система из противоречивых уравнений, которая *не имеет решений*.

<u>Пример 1</u>. Решить систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 + 3x_2 = 7 \end{cases}$$

<u>Решение</u>. Вычислим определитель системы Δ и определители Δ_{x1} и Δ_{x2}:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 - (-1) \cdot 1 = 6 + 1 = 7.$$

$\Delta \neq 0$

$$\Delta_{x1} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} = 0 \cdot 3 - (-1) \cdot 7 = 0 + 7 = 7$$

$$\Delta_{x2} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} = 2 \cdot 7 - 0 \cdot 1 = 14 - 0 = 14$$

$$x_1 = \frac{\Delta_{x1}}{\Delta} = \frac{7}{7} = 1 \quad x_2 = \frac{\Delta_{x2}}{\Delta} = \frac{14}{7} = 2$$

Ответ: x_1=1, x_2=2

3. Решение систем линейных уравнений матричным методом

Пусть дана система уравнений $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$

Рассмотрим матрицу, составленную из коэффициентов при неизвестных $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$. Свободные члены и неизвестные можно записать в виде матриц-столбцов: $B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

Тогда используя правило умножения матриц, эту систему уравнений можно записать так:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \text{ или AX=B } \Rightarrow\ X=A^{-1}\cdot B$$

Это равенство называется *простейшим матричным уравнением*.

<u>*Чтобы решить матричное уравнение, нужно:*</u>

1. Найти обратную матрицу A^{-1}.

2. Найти произведение обратной матрицы A^{-1} на матрицу – столбец свободных членов B, т.е. $A^{-1}B$.

3. Пользуясь определением равных матриц, записать ответ.

<u>Пример 2</u>. Решить систему уравнений $\begin{cases} 2x+3y+2z=9 \\ x+2y-3z=14 \\ 3x+4y+z=16 \end{cases}$ представив ее в виде матричного уравнения.

<u>Решение</u>. Перепишем систему в виде AX=B, где $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 9 \\ 14 \\ 16 \end{pmatrix}$

Решение матричного уравнения имеет вид $X=A^{-1}B$.

<u>Найдем</u> A^{-1}:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}=28-30-4=-6$$

$$A_{11}=\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}=14,\ A_{12}=-\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}=-10,\ A_{13}=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}=-2,$$

$$A_{21}=-\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}=5,\ A_{22}=\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}=-4,\ A_{23}=-\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}=1,$$

$$A_{31}=\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}=-13,\ A_{32}=-\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}=8,\ A_{33}=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=1$$

Таким образом $A^{-1} = \frac{-1}{6}\begin{pmatrix} 14 & 5 & -13 \\ -10 & -4 & 8 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, откуда $X = A^{-1}B$

$$X = \frac{-1}{6}\begin{pmatrix} 14 & 5 & -13 \\ -10 & -4 & 8 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 9 \\ 14 \\ 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Следовательно, x=2, y=3, z=-2

4. Решение систем линейных уравнений методом Гаусса.

Одним из наиболее универсальных и эффективных методов решений линейных алгебраических систем является метод Гаусса, состоящий в последовательном исключении неизвестных.

Пусть дана система уравнений $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$

Процесс решения по методу Гаусса состоит из двух этапов. На первом этапе (прямой ход) система приводится к ступенчатому (в частности треугольному) виду.

Приведенная ниже система имеет ступенчатый вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad a_{kk}x_k + \ldots + a_{kn}x_n = b_k \end{cases}$$

На втором этапе (обратный ход) идет последовательное определение неизвестных из полученной ступенчатой системы.

При выполнении прямого хода используют следующие преобразования:

1. умножение или деление коэффициентов свободных членов на одно и то же число;
2. сложение и вычитание уравнений;
3. перестановку уравнений системы;
4. исключение из системы уравнений, в которых все коэффициенты при неизвестных и свободные члены равны нулю.

Матричный способ решения систем линейных уравнений, как и решение методом Крамера, применим только для особых систем линейных уравнений, в которых количество неизвестных совпадает с количеством уравнений.

Метод Гаусса применим для решения произвольных систем линейных уравнений и, следовательно, является универсальным методом. Этот метод позволяет ссущественно упростить и сам процесс поиска решений, если все промежуточные преобразования осуществить над специальной матрицей В составленной из коэффициентов системы и ее свободных членов.

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22}\dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots\dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2}\dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix},$$

Пример 3. Решить систему линейных уравнений методом Гаусса.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 5 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -3 \\ 7x_1 + x_2 - x_3 = 10 \end{cases}$$

Составим расширенную матрицу системы.

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 5 \\ 1 & -2 & 3 & -3 \\ 7 & 1 & -1 & 10 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & 5 \\ 7 & 1 & -1 & 10 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & -3 \\ 0 & 5 & -7 & 11 \\ 0 & 15 & -22 & 31 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & -3 \\ 0 & 5 & -7 & 11 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{array}\right)$$

Таким образом, исходная система может быть представлена в виде:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -3 \\ 5x_2 - 7x_3 = 11 \\ -x_3 = -2 \end{cases}$$, откуда получаем: $x_3 = 2$; $x_2 = 5$; $x_1 = 1$.

Контрольные вопросы

1. Как записать простейшее матричное уравнение?
2. Как решить матричное уравнение?
3. Сформулируйте теорему Крамера.
4. Запишите формулы Крамера.
5. Опишите метод Гаусса.
6. В каком случае система не имеет решения?
7. В каком случае система имеет бесчисленное множество решения?

Практическое занятие № 3.
Решение системы линейных уравнений

Цели занятия:

К занятию надо знать.

- Формулировку теоремы Крамера.
- Формулы Крамера.
- В каком случае система линейных уравнений не имеет решения или имеет бесчисленное множество решения.
- Правило решения матричного уравнения.
- Процесс решения систем линейных уравнений по методу Гаусса.

На занятии надо научиться:

- Решать систему линейных уравнений формулами Крамера.
- Решать систему линейных уравнений матричным методом.
- Решать систему линейных уравнений методом Гаусса.

Порядок работы на занятии:

1. Повторить формулы Крамера.
2. Повторить правило решения матричного уравнения.
3. Повторить процесс решения систем линейных уравнений по методу Гаусса.
4. Рассмотреть образец решения задания 1.
5. Выполнить задание 2.
6. Выполненное задание покажите преподавателю. Возможен устный

<u>Задание 1.</u> Решить систему уравнений: $\begin{cases} 5x - y - z = 0 \\ x + 2y + 3z = 14 \\ 4x + 3y + 2z = 16 \end{cases}$

- Формулами Крамера
- Матричным методом
- Методом Гаусса

<u>Решение</u>.

- *Формулами Крамера:*

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 5(4 - 9) + (2 - 12) - (3 - 8) = -25 - 10 + 5 = -30;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 14 & 2 & 3 \\ 16 & 3 & 2 \end{vmatrix} = (28 - 48) - (42 - 32) = -20 - 10 = -30; \qquad x_1 = \Delta_1/\Delta = \mathbf{1};$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 1 & 14 & 3 \\ 4 & 16 & 2 \end{vmatrix} = 5(28 - 48) - (16 - 56) = -100 + 40 = -60; \qquad x_2 = \Delta_2/\Delta = \mathbf{2;}$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 14 \\ 4 & 3 & 16 \end{vmatrix} = 5(32 - 42) + (16 - 56) = -50 - 40 = -90; \qquad x_3 = \Delta_3/\Delta = \mathbf{3.}$$

➢ *Матричным методом:*

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 0 \\ 14 \\ 16 \end{pmatrix},\ A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Найдем обратную матрицу A^{-1}.

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 5(4-9) + 1(2-12) - 1(3-8) = -25 - 10 + 5 = -30.$$

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -5; \qquad A_{21} = -\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -1; \qquad A_{31} = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1;$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 10; \qquad A_{22} = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 14; \qquad A_{32} = -\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -16;$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -5; \qquad A_{23} = -\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -19; \qquad A_{33} = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 11;$$

$$A^t = \begin{pmatrix} -5 & -1 & -1 \\ 10 & 14 & -16 \\ -5 & -19 & 11 \end{pmatrix} \qquad A^{-1} = \frac{1}{-30}\begin{pmatrix} -5 & -1 & -1 \\ 10 & 14 & -16 \\ -5 & -19 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/6 & 1/30 & 1/30 \\ -1/3 & -14/30 & 16/30 \\ 1/6 & 19/30 & -11/30 \end{pmatrix};$$

<u>Находим матрицу X.</u>

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1}B = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{30} & \frac{1}{30} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{7}{15} & \frac{8}{15} \\ \frac{1}{6} & \frac{19}{30} & -\frac{11}{30} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 14 \\ 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6}0 + \frac{14}{30} + \frac{16}{30} \\ -\frac{1}{3}0 - \frac{98}{15} + \frac{128}{15} \\ \frac{1}{6}0 + \frac{266}{30} - \frac{176}{30} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Итого решения системы: **x =1; y = 2; z = 3.**

➢ *Методом Гаусса*

Составим расширенную матрицу системы.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 14 \\ 4 & 3 & 2 & 16 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 4 & 3 & 2 & 16 \\ 5 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 0 & -5 & -10 & -40 \\ 0 & -11 & -16 & -70 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 0 & -5 & -10 & -40 \\ 0 & 0 & 6 & 18 \end{array}\right)$$

Таким образом, исходная система может быть представлена в виде: $\begin{cases} x + 2y + 3z = 14 \\ -5y - 10z = 40 \\ 6z = 18 \end{cases}$, откуда получаем: **z = 3; y = 2; x = 1.**

Задание 2. Решить систему тремя способами: $\begin{cases} kx + ly + mz = n \\ px + qy + rz = s \\ tx + fy + gz = h \end{cases}$

➢ по формулам Крамера

➢ матричным методом;

➢ методом Гаусса.

Соответствующие коэффициенты выберите из таблицы:

Вариант	k	l	m	n	p	q	r	s	t	f	g	h
1	1	1	1	0	2	1	0	4	1	-1	-2	5
2	1	1	-1	-4	2	3	1	-1	1	-1	2	6
3	2	1	1	3	5	-2	3	0	1	0	2	5
4	1	1	-1	0	2	3	-2	2	3	-2	0	1
5	1	1	1	4	2	1	3	9	3	3	-1	0
6	2	1	1	-3	3	1	-2	7	3	1	0	1
7	3	-1	-1	2	1	1	1	0	2	2	3	7
8	2	1	-1	3	3	2	2	-7	1	0	1	-2
9	1	1	1	6	2	-1	2	6	3	1	-1	2
10	1	1	2	3	2	-1	0	3	3	-1	0	1

Лабораторная работа № 1.
Применение MS Excel

Цели занятия:

К занятию надо знать.

- ➢ Условия сложения и произведения матриц.
- ➢ Сложения матриц, умножение матрицы на число, произведение матриц.
- ➢ Ввод формулы в ячейки MS Excel.
- ➢ Ввод функции в ячейки MS Excel.
- ➢ Как использовать маркер заполнения.

На занятии надо научиться:

- ➢ Складывать матрицы в MS Excel.
- ➢ Вычислять произведения двух матриц в MS Excel.
- ➢ Вычислять определитель матрицы n – го порядка в MS Excel.
- ➢ Находить обратную матрицу в MS Excel.

<u>Выполнить задания в программе MS Excel:</u>

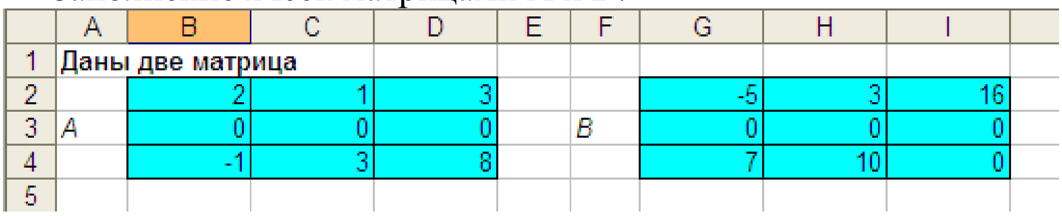
<u>Задание 1.</u> Найти а) A+B; б) AB:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 8 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} -5 & 3 & 16 \\ 0 & 0 & 0 \\ 7 & 10 & 0 \end{pmatrix}$$

<u>Решение</u>.

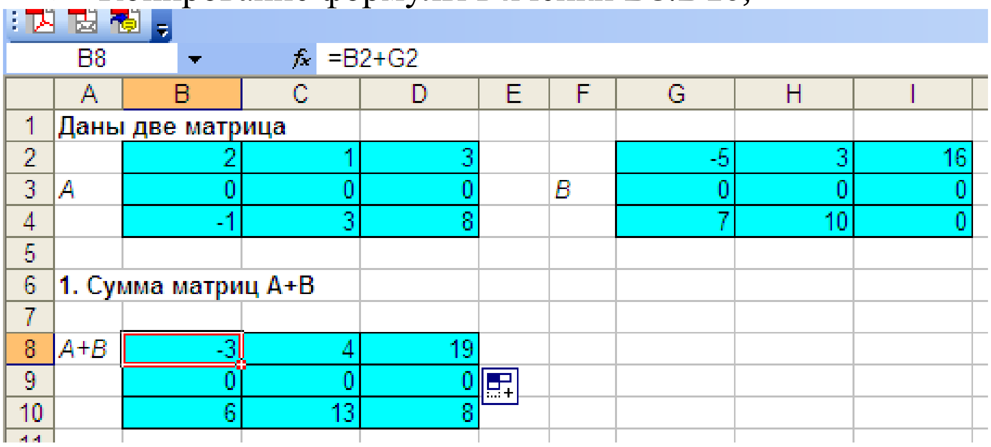
1. *<u>а) найти сумму матриц A+B:</u>*

- ➢ Заполнение ячеек матрицами A и B:



	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Даны две матрица								
2		2	1	3			-5	3	16
3	A	0	0	0		B	0	0	0
4		-1	3	8			7	10	0
5									

- ➢ Вводим формулу в ячейку B8 «=B2+G2»;
- ➢ Копирование формулы в ячейки B8:D10;

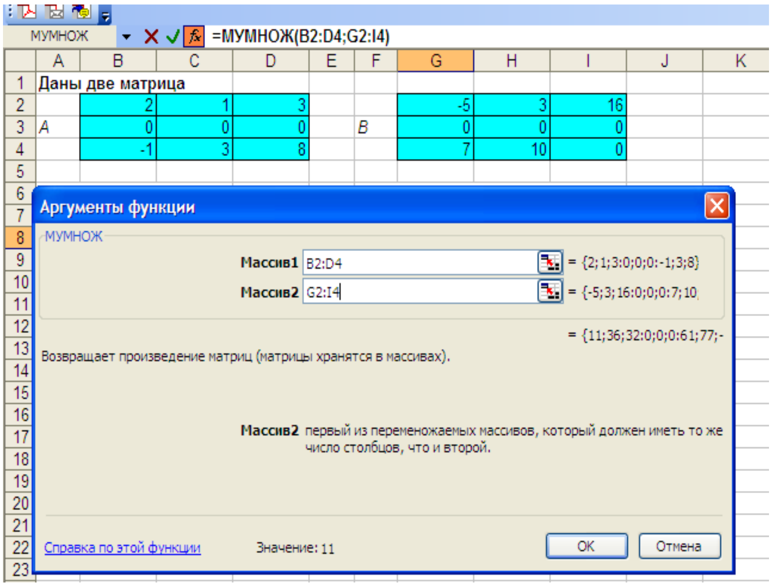


B8 fx =B2+G2

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Даны две матрица								
2		2	1	3			-5	3	16
3	A	0	0	0		B	0	0	0
4		-1	3	8			7	10	0
5									
6	1. Сумма матриц A+B								
7									
8	A+B	-3	4	19					
9		0	0	0					
10		6	13	8					

<u>б) Найти произведение матриц AB:</u>

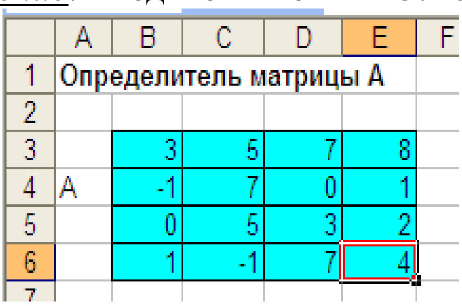
4. Введите формулу в ячейку G8 «=МУМНОЖ(B2:D4;G2:I4)»;
5. Функция МУМНОЖ (возвращает произведение матриц), в массив1 вводим диапазон ячеек матрицы А (B2:
6. D4), в массив2 вводим диапазон ячеек матрицы В (G2:I4);



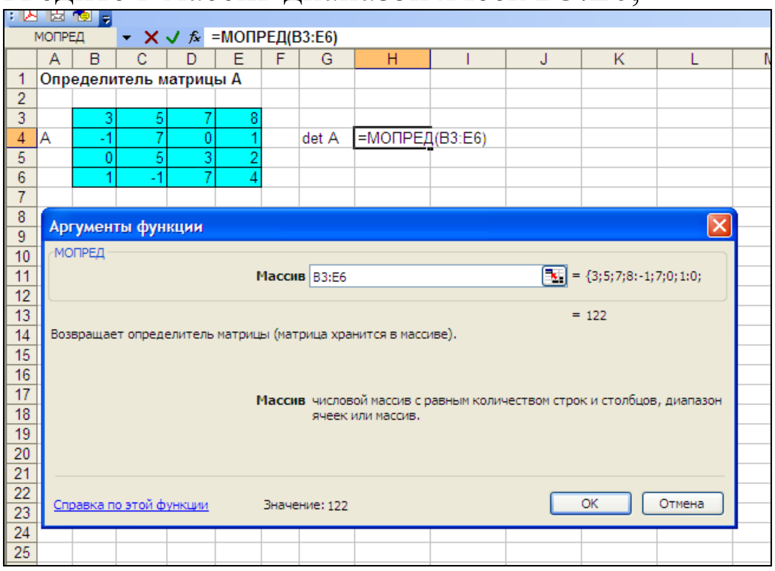
7. Выделите диапазон G8:I10, начиная с ячейки, содержащей формулу. Нажмите клавишу F2, а затем нажмите клавиши CTRL+SHIFT+ENTER.

Задание 2. *Вычислить определитель матрицы* $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 & 8 \\ -1 & 7 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 7 & 4 \end{pmatrix}$

Решение. Введите в ячейки B3:E6 данные матрицы A;

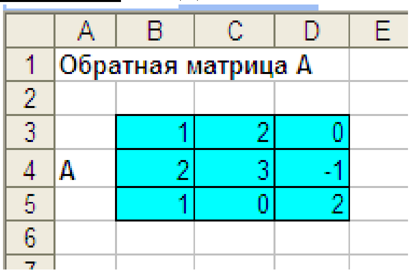


- Введите в ячейку H4 формулу «=МОПРЕД(B3:E6)»
- Вставьте функцию МОПРЕД (возвращает определитель матрицы), введите в массив диапазон ячеек B3:E6;

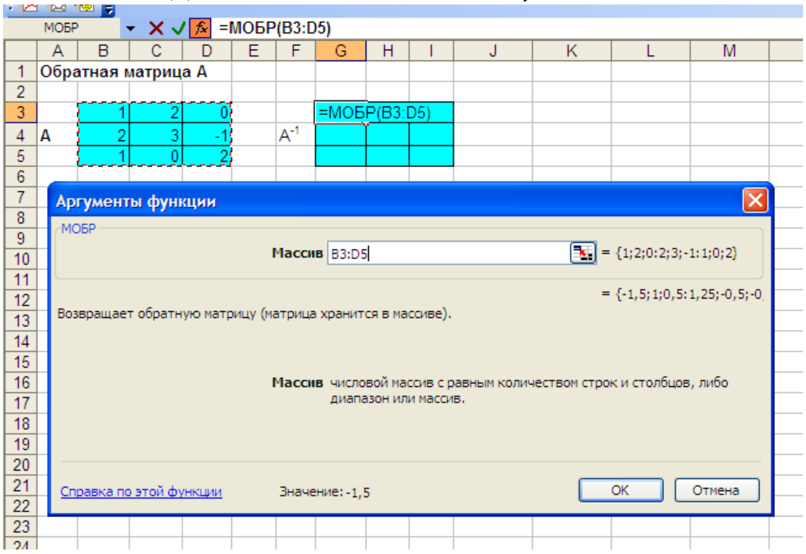


Задание **3.** <u>*Дана матрица*</u> $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, <u>*найти* A^{-1}.</u>

<u>*Решение.*</u> Введите в ячейки B3:D5 данные матрицы A;



- Введите формулу в ячейку G3 «=МОБР(B3:D5)»
- Вставьте функцию МОБР (возвращает обратную матрицу), введите в массив диапазон ячеек B3:D5;



8. Нажмите ОК;
9. Выделите диапазон G3:I5, начиная с ячейки, содержащей формулу. Нажмите клавишу F2, а затем нажмите клавиши CTRL+SHIFT+ENTER.

Контрольная работа № 1.
Решение систем линейных уравнений.

Вариант 1

Решить систему тремя способами:
- по формулам Крамера
- матричным методом;
- методом Гаусса.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 9 \\ x_1 - 4x_2 - 2x_3 = 3 \end{cases}$$

Вариант 2

Решить систему тремя способами:
- по формулам Крамера
- матричным методом;
- методом Гаусса.

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 3 \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 = 2 \end{cases}$$

Вариант 3

Решить систему тремя способами:
- по формулам Крамера;
- матричным методом;
- методом Гаусса.

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ 5x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases}$$

Вариант 4

Решить систему тремя способами:
- по формулам Крамера;
- матричным методом;
- методом Гаусса.

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 2 \\ 5x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \end{cases}$$

Вариант 5

Решить систему тремя способами:
- по формулам Крамера;
- матричным методом;
- методом Гаусса.

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 4 \\ 3x_1 + 5x_2 - 3x_3 = -1 \\ -2x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 1 \end{cases}$$

Вариант 6

Решить систему тремя способами:
- по формулам Крамера;
- матричным методом;
- методом Гаусса.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 5 \\ 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 8 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6 \end{cases}$$

Вариант 7

Решить систему тремя способами:
- по формулам Крамера
- матричным методом;
- методом Гаусса.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 10 \\ 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 4 \end{cases}$$

Вариант 8

Решить систему тремя способами:
- по формулам Крамера;
- матричным методом;
- методом Гаусса.

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 7 \\ x_1 - 4x_2 - 2x_3 = 3 \end{cases}$$

Вариант 9

Решить систему тремя способами:
- по формулам Крамера;
- матричным методом;

Вариант 10

Решить систему тремя способами:
- по формулам Крамера;
- матричным методом;

- методом Гаусса.

$$\begin{cases} 5x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 14 \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 16 \end{cases}$$

- методом Гаусса.

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 12 \\ 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 = -10 \\ 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 6 \end{cases}$$

Вариант 11

Решить систему тремя способами:
- по формулам Крамера;
- матричным методом;
- методом Гаусса.

$$\begin{cases} -5x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 9 \\ x_1 - 4x_2 - 2x_3 = 3 \end{cases}$$

Вариант 12

Решить систему тремя способами:
- по формулам Крамера;
- матричным методом;
- методом Гаусса.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = -2 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

Вариант 13

Решить систему тремя способами:
- по формулам Крамера;
- матричным методом;
- методом Гаусса.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -1 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = -1 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \end{cases}$$

Вариант 14

Решить систему тремя способами:
- по формулам Крамера;
- матричным методом;
- методом Гаусса.

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 5 \\ -3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = -7 \\ 4x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 2 \end{cases}$$

Вариант 15

Решить систему тремя способами:
- по формулам Крамера;
- матричным методом;
- методом Гаусса.

$$\begin{cases} 7x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 9 \\ -2x_1 + 3x_2 + 7x_3 = -5 \\ 3x_1 + 7x_2 - 2x_3 = -4 \end{cases}$$

Вариант 16

Решить систему тремя способами:
- по формулам Крамера;
- матричным методом;
- методом Гаусса.

$$\begin{cases} -2x_1 - x_2 + x_3 = -1 \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 = -2 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = 3 \end{cases}$$

Вариант 17

Решить систему тремя способами:
- по формулам Крамера
- матричным методом;
- методом Гаусса.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = -2 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

Вариант 18

Решить систему тремя способами:
- по формулам Крамера
- матричным методом;
- методом Гаусса.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 6 \end{cases}$$

Вариант 19

Решить систему тремя способами:
- по формулам Крамера
- матричным методом;
- методом Гаусса.

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 9x_3 = 28 \\ 7x_1 + 3x_2 - 6x_3 = -1 \\ 7x_1 + 9x_2 - 9x_3 = 5 \end{cases}$$

Вариант 20

Решить систему тремя способами:
- по формулам Крамера
- матричным методом;
- методом Гаусса.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ -3x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 2 \end{cases}$$

Вариант 21

Решить систему тремя способами:
- по формулам Крамера
- матричным методом;
- методом Гаусса.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 2 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 8 \end{cases}$$

Вариант 22

Решить систему тремя способами:
- по формулам Крамера
- матричным методом;
- методом Гаусса.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3 \\ 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 4 \end{cases}$$

Список используемой литературы

1. Валуцэ И.И., Дилигул Г.Д. Математика для техникумов на базе средней школы. Учебн. Пособие. – М.: Наука, 1990.
2. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2–х ч.: Учеб.пособие для втузов. – 5–е изд., испр. – М.: Высш.шк., 1999. – 304 с.: ил.
3. Шипачев В.С. Высшая математика. Учеб.для вузов.-М.: Высш.школа. 1998.- 497с.: ил.
4. Шипачев В.С. Задачник по высшей математике. Учеб.пособие для вузов.-М.: Высш.школа. 1998.- 304с.: ил.
5. В. Т. Лисичкин, И. Л. Соловейчик. Математика. Учеб.пособие для техникумов.-М.: Высш.школа. 1991. – 480 с.: ил
6. Дмитрий Письменный Конспект лекций по высшей математике Учеб.пособие для втузов. – 3-е изд.. – М.: Айрис – пресс; 2005. – 608 с.: ил.
7. Н. В. Богомолов Практические занятия по математике: Учеб.пособие для втузов. – 4–е изд., стер. – М.: Высш.шк.,2012. – 495 с.
8. В. Д. Черненко ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА В примерах и задачах 1 том Учебное пособие для вузов. В 3 т.: Т. 1.— СПб.: Политехника, 2003.— 703 с: ил.
9. Математика. Контрольные задания / Сост.: В.И. Фомин. Тамбов: Изд-во Тамб. гос. техн. ун-та, 2004. 88 с.
10. Учебно-методический комплекс дисциплины « Математика». Раздел 1 «Линейная и векторная алгебра». Контрольно-измерительные материалы. – Уфа: Издательство УГНТУ, 2007. – 175 с