Министерство образования и науки Хабаровского края
Краевое государственное бюджетное
профессиональное образовательное учреждение
«Хабаровский машиностроительный техникум»

# Методическая разработка по учебной дисциплине «Математика: алгебра, начала математического анализа, геометрия» 2 часть

**2017**

**Рассмотрено и одобрено** на заседании ЦК «Математического и естественнонаучного цикла»
Протокол № ____
«___»_________________ 2017 г.
Председатель ЦК _________ Т.А. Новикова

**Рекомендовано**
Методический совет
Протокол № ____
«___»_________________ 2017 г.
Председатель ____________ И.Н. Пухляр

**Методическая разработка по учебной дисциплине «Математика: алгебра, начала математического анализа, геометрия»** для студентов первого курса специальностей: 08.02.08 «Монтаж и эксплуатация оборудования и систем газоснабжения», 09.02.02 «Компьютерные сети», 13.02.11 «Техническая эксплуатация и обслуживание электрического и электромеханического оборудования (по отраслям)», 15.02.08 «Технология машиностроения», 22.02.06 «Сварочное производство», 38.02.02 «Страховое дело (по отраслям)». Составлено преподавателем КГБ ПОУ ХМТ Кичигиной Н.Х.

## Содержание

## Раздел 2. Начала математического анализа

### *2.1. Множества и отношения*

Множество

Конечное бесконечное

Свойства множеств:

1. Подмножество : множество A называется подмножеством множество B если все элементы из A принадлежат B A$\subset B$
2. A=B если их элементы равны.
3. Пересечение A и B называется множество только тех элементах которые принадлежат A и B, $A \cap B$
4. Объединением A и B называется множество только тех элементов которые принадлежат $A \cup B$
5. Разностью A и B называется множество состоящих только из тех элементах которые принадлежат A\ B

Пример:

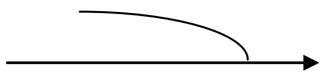
A-дел.24
A=2,3,4,6,8,12,24,1

$9x^2 - 1 = 0$ $x^2 = \frac{1}{9}$ $x_2 = \frac{1}{-3}$

$9x^2 = 1$ $x_1 = \frac{1}{3}$

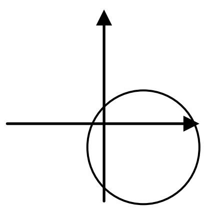
Ответ: целых корней нет

y$\leq$3



3

4(x-2)$^2$+(y+1)$\leq$9
Окр. o(2,-1)
R=3



A=$\{0,1,2,3\}$ B=$\{-1,2,3,4,5,6\}$

A$\cap B = \{2,3\}$
A$\cup B = \{0,1,2,3\}$

A= $\{0,1,2,3,4,5,6\}$
B= $\{1,2,4,6,8\}$
C= $\{-1,0,3,4,7,8\}$

$A \cap B = \{4,6\}$
$A \cup C\{-7,0,1,3,4,2,5,6,7,8\}$
$A \cap B \cap C = \{4\}$
$(A \cup B) \cup C = \{0,3,4,8\}$
$A \cup B = \{0,1,2,3,4,5,6,8\}$
$A \cup B \cup C = \{-1,0,1,2,3,4,5,6,7,8\}$
$A \cup (B \cap C) = \{0,1,2,3,4,5,6,8\}$
$B \cap C = \{4,8\}$

ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ
A= $\{0,1,2,3\}$
B= $\{-1,2,3,4,5,6\}$
$A \cap B, A \cup B, A \setminus B, B \setminus A$

$A \cap B = \{2,3\}$
$A \cup B = \{-1,0,1,2,3,4,5,6\}$

A\B $\{0,1\}$
B\A= $\{-1,1,5,6\}$

Объекты входящие в множество называется элементами
N=1,2…
R= -1;1;0… $\varnothing$- пустое множество

Отношение.
В математике для обозначения какой либо связи между предметами используют термин отношение.
Пример;
1. 5<20
2. 24/6
Для обозначения отношения используют символ ρ- «ро».
Определение 1.
Отношение ρ на множестве A называется рефлексивными, если для любого x ρ x.
Пример. 5=5, a+b=b+a.
Определение 2.
Отношение ρ называется симметричным , если для любых x , y∈A
xρy⇒Cρx
пример: $\parallel$ ab, a$\parallel$b⇒b$\parallel$a.
5>3⇒3<5.
Определение 3.

Отношение ρ называется транзитивным, если , x,y, ∈A:
xρy, yρz⇒xρz
Пример: b1||b2, b2||b3⇒b1||b3.
Определение 4.
Отношение ρ называется отношение эквивалентности, если она рефлексивна, транзитивна и симметрична.
Примеры:
A={1, 2, 3}.
B={1, 2, 3, 4, 5, 6}.
ρ- каждый из а делится элемент b.
AxB=((1,1)(1,2)(1,3)(1,4)(1,5)(1,6)(2,1)(2,2)(2,3)(2,4)(2,5)(2,6)(3,1)(3,2)(3,3)(3,4)(3,5)(3,6)):
ρ=( (1,1)(1,2)(1,3)(1,4)(1,5)(2,1)(2,2)(2,4)(2,5)(3,1)(3,2)(3,3)(3,4)(3,5)(3,6) ).
A= {-4,-1,7,8}
B= {1,2,3,4,5,6}
ρ-каждый из а делится на Эл-т и В.
ρ= ( ( -4,0), (-4,9) , (-1,0) (-1,9) , (7,9) (8,9).3:
a-b<0.

Повторение

$$\begin{cases} 2x - 4y = 14 \\ 4x + 3y = -27 \end{cases} \qquad \begin{cases} 4x - 8y = 28 \\ 4x + 3y = 27 \end{cases}$$

2x-4*(-5)=14 -11y=55
2x+20=14 y=-5
x=-3

## *2.2. Комплексные числа*

В XVI веке итальянский математик Дж. Кордано и Р. Бомбелли, решая квадратное уравнение $x^2 - a^2 = 0, x^2 = -a^2$, ввели символ $\sqrt{-1}$, который в XVIII веке петербургский ученый Л. Эйлер обозначил $i = \sqrt{-1}$, отсюда решение данного квадратного уравнения имеет вид $x_{1,2} = \pm a\sqrt{-1} = \pm ai$ так появилось множество комплексных чисел.

Опр.1.1. Комплексным числом z называется выражение вида $z = a + bi$, где а-действительная часть комплексного числа, b-мнимая часть, $i = \sqrt{-1}, i^2 = -1$- мнимая единица.

$z = a + bi$ - алгебраическая форма комплексного числа.

Опр.1.2. Два к.ч. $z_1 = a_1 + b_1 i, z_2 = a_2 + b_2 i$ называются равными, если их действительные и мнимые части равны, т.е. $a_1 = a_2, b_1 = b_2$.

К.ч. вида $z = 0 + 0i$ называется нулевым.
К.ч. вида $z = a + bi, z = a - bi$ называются комплексно – сопряженными.

Пример. $z = 5 + 4i$, $z = 5i$, $z = 4 - 2i$, $z = \frac{1}{2} - 0{,}3i$

$\begin{matrix} z = 2 + 3i \\ z = 2 - 3i \end{matrix}$ комплексно – сопряженные.

Опр. 1.3. Суммой двух к.ч. $z_1 = a + bi, z_2 = c + di$ называется к.ч. вида $z = z_1 + z_2 = a + bi + c + di = (a + c) + (b + d)i$.

Опр.1.4. Разностью двух к.ч. $z_1 = a + bi, z_2 = c + di$ называется к.ч. вида $z = z_1 - z_2 = a + bi - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$.

Пример.
$$z_1 = 2 - i, z_2 = -1 + 3i$$
$$z_1 + z_2 = 2 - i + (-1 + 3i) = 2 - 1 + (-1 + 3)i = -1 + 3i$$
$$z_1 - z_2 = 2 - i - (-1 + 3i) = 2 + 1 + (-1 - 3)i = 3 - 4i$$

Опр. 1.5. Произведение двух к.ч. $z_1 = a + bi, z_2 = c + di$ называется к.ч. вида $z = z_1 * z_2 = a + bi * (c + di) = ac + adi + bci + bdi^2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$.

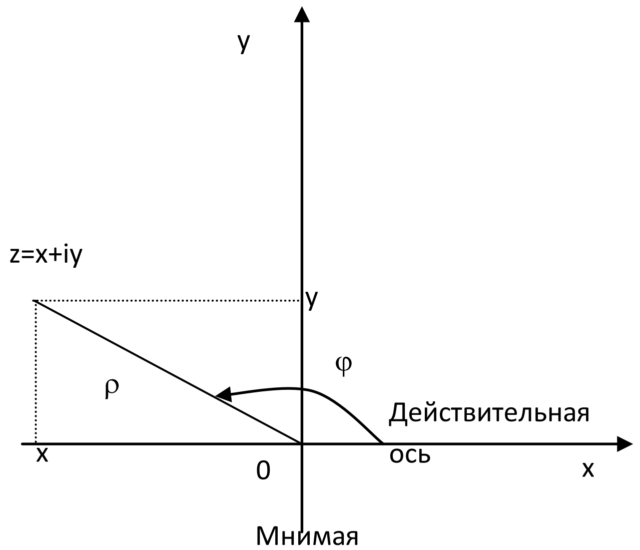
Пример.
$$z_1 = 2 - 3i, z_2 = 1 + 2i$$
$$z_1 * z_2 = (2 - 3i)(1 = 2i) = 2 + 4i - 3i - 6i^2 = 8 + i$$

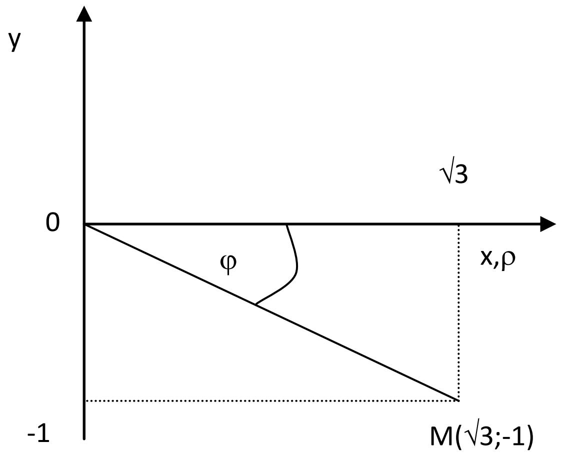
Опр. 1.6. Частным двух к.ч. $z_1 = a + bi, z_2 = c + di$ называется к.ч. вида
$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)} = \frac{(ac - bd)(ad + bc)i}{c^2 + d^2}$$

Пример.
$$z_1 = 3 - 2i, z_2 = 1 + i$$
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{3 - 2i}{1 + i} = \frac{(3 - 2i)(1 - i)}{(1 + i)(1 - i)} = \frac{3 - 3i - 2i - 2}{1 - i + i - i^2} = \frac{1 - 5i}{2} = \frac{1}{2} - \frac{5}{2}i$$

**Геометрическое представление комплексных чисел.**

Для геометрического представления к.ч. используют точки и векторы координатной плоскости. В качестве к.ч. $z = a + bi$ используют точку с абсциссой а и ординатой b.






Если к.ч. $\neq$ 0, то его можно представить в виде

$z=|z|*(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ тригонометрическая форма к.ч,

где $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$ модуль к.ч

Угол $\alpha$ - угол, образованный $\vec{OA}$ с осью OX, назначенный аргументом к.ч. и обозначается $\alpha=\arg z$, причем tg $\varphi(\arg z)=\dfrac{b}{a}$

Чтобы перейти от алгебраической формулы к.ч к тригонометрической и обратно, необходимо сделать следующие преобразования:

$$tg\varphi=\frac{b}{a}, z=|z|=\sqrt{a^2+b^2},\ a=r*\cos\varphi,\ \ b=r*\sin\varphi\Rightarrow\cos\varphi=\frac{a}{r},\sin\varphi=\frac{b}{r}$$

Пример.

$z=-2+3i$. Составить тригонометрическую форму к.ч. и изобразить его?

$$|z|=\sqrt{(-2)^2+3^2}=\sqrt{13}$$

$$tg\varphi=-\frac{3}{2},\varphi=arctg(-\frac{3}{2})\approx 34^\circ$$

$$z=\sqrt{13}(\cos 34^\circ+i\sin 34^\circ)$$

Действия над к.ч. в тригонометрической форме:

$$z_1=|z_1|(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1), z_2=|z_2|(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)$$

$$1. z_1\cdot z_2=|z_1||z_2|(\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2))$$

$$2. \frac{z_1}{z_2}=\frac{|z_1|}{|z_2|}(\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2))$$

### *2.3. Элементы комбинаторики и теории вероятностей*

*Элементы комбинаторики*

Группы, составленные из каких-либо элементов, называются соединениями.

Различают три основных вида соединений: размещение, перестановки и сочетания.

Задачи, в которых производится подсчет возможных различных соединений, составленных из конечного числа элементов по некоторому правилу, называются комбинаторными. Раздел математики, занимающийся их решением, называется *комбинаторикой*

. **1. Размещение**. *Размещениями* из n элементов по m в каждом называются такие соединения, которые отличаются друг от друга либо самими элементами, либо порядком их расположения

Число размещений из n элемента по m обозначаются символом $A_{m}^{n}$ и вычисляется по формуле $A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$

**2. Перестановки.** *Перестановками* из n элементов называются такие соединения из всех n элементов, которые отличаются друг от друга порядком расположения элементов.

Число перестановок из n элементов, обозначается символом $P_m$

Перестановки представляют частный случай размещениям из n элементов по n в каждом, т. е $P_n = n!$

**3. Сочетания.** *Сочетаниями* из n элементов по m в каждом называются такие соединения, которые отличаются друг от друга хотя бы одним элементом.

Число сочетаний из n элементов по m обозначается $C_n^m$. Оно находится по формуле $C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m}$ или $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$

**Задачи**

1. Составить всевозможные перестановки из элементов 1)1; 2)5,6; 3)a. b.c.

2. Вычислить значения выражений: 1)5! + 6!;2) $\frac{52!}{50}$

3. Вычислить: 1) $C\frac{13}{15}$; 2) $C\frac{4}{6} + C\frac{0}{5}$

4. Составьте всевозможные перестановки из букв: a.b.c.d.

5. Вычислите значения следующих выражений: 1) $\frac{10!-8!}{89}$; $\frac{5!+6!}{4!}$

6. Сократите дроби: 1) $\frac{n!}{(n-2)!}$; 2) $\frac{(n-3)!}{n!}$; 3) $\frac{2_m(2_m-1)}{(2m)}$

7.Вычелить 1) $C\frac{10}{12}$ 2) $C\frac{98}{100}$ 3) $C\frac{5}{8}$ 4) $C\frac{100}{100} + C\frac{1}{100}$

## *2.4. Случайные события. Вероятность события*

1. Случайные события. Изучение каждого явления в порядке наблюдения или производства опыта связано с осуществлением некоторого комплекса условий (испытаний). Всякий результат или исход испытания называется событием.

Если событие при заданных условиях может произойти или не произойти, то оно называется случайным. В том случае, когда событие должно непременно произойти, его называют достоверным, а в том случае, когда оно заведомо не может произойти,- невозможным.

События называются несовместными, если каждый раз возможно появление только одного из них. События называются несовместными, если в данных условиях появление одного из этих событий не исключает появление другого при том же испытании.

События называются противоположными, если в условиях испытания они, являясь единственными его исходами, несовместны.

Вероятность события рассматривается как мера объективной возможности появления случайного события.

2. Классическое определение вероятности. Вероятностью события А называется отношение числа исходов m, благоприятствующих наступлению данного события А, к числу n всех исходов (несовместных, единственно возможных и равновозможных), т.е.

$$P(A)=m/n.$$

Вероятность любого события не может быть меньше нуля и больше единицы, т.е. $0 \le P(A) \le 1$. Невозможному событию соответствует вероятность P(A)=0, а достоверному- вероятность P(A)=1.

Пример. В лотерее из 1000 билетов имеются 200 выигрышных. Вынимается наугад один билет. Чему равна вероятность того, что этот билет выигрышный?

o Общее число различных исходов есть n=1000. Число исходов, благоприятствующих получению выигрыша, составляет m=200. Согласно формуле (16.11), получим P(A)=200/1000=1/5=0,2. •

Задачи:

1. В ящике с деталями оказалось 300 деталей 1сорта, 200 деталей 2сорта и 50 деталей 3сорта. Наудачу вынимают одну из деталей. Чему равна вероятность вынуть деталь 1,2 или 3 сорта?
2. В урне находится 20 белых и 15 черных шаров. Наудачу вынимают один шар, который оказался белым, и откладывают его в сторону. После этого берут еще один шар также окажется белым. Давай Вася ты умный!
3..В урне находится 7 белых и 5 черных шаров. Найдите вероятность того,что: 1) наудачу вынутый шар окажется черным;2) два наудачу вынутых шара окажутся черными.
4. Считая выпадение любой грани игральной кости одинаково вероятным, найти вероятность выпадения грани с нечетным числом очков.

*Теорема сложения вероятностей*

**Теорема сложения вероятностей несовместимых событий**. Вероятность появления одного из нескольких попарно несовместимых событий, безразлично какого, равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A+B) = P(A) + P(B);$$

$$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n)$$

**Теорема сложения вероятностей совместных событий.** Вероятность появления хотя бы одного из двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления:

$$P(A+B) = P(A) + P(B) – P(AB)$$

Для совместных событий имеет место формула:

$$P(A+B+C) = P(A) + P(B) + P(C) – P(AB) – P(AC) – P(BC) + P(ABC)$$

Событие противоположное событию А, обозначают $\overline{A}$. Сумма вероятностей двух противоположных событий равна единице:

$$P(A) + P(\overline{A})=1$$

Вероятность наступления события А, вычисленная в предложении, что событие В уже произошло, называется *условной вероятностью* события А при условии В и обозначается $P_B(A)$ или P(A/B).

Если А и В – независимые события, то

$$P(B) - P_A(B) = P_{\bar{A}}(B)$$

События А, В, С,… называются *независимыми в совокупности,* если вероятность каждого из них не меняется в связи с наступлением или ненаступлением других событий по отдельности или в любой их комбинации.

1. В ящике в случайном порядке положены 10 деталей, их которых 4 стандартных. Контролер наудачу взял 3 детали. Найдите вероятность того, что хотя бы одна из взятых деталей оказалась стандартной.
2. в урне находятся 10 белых, 15 черных, 20 синих и 25 красных шаров. Найдите вероятность того, что вынутый шар окажется: 1) белым ; 2) черным или красным.
3. Найдите вероятность того, что наудачу взятое двузначное число окажется кратным либо 4, либо 5, либо тому и другому одновременно.

*Теоремы умножения вероятностей.*

**Теорема умножения вероятностей независимых событий**. Вероятность совместного появления двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий:

$$P(AB) = P(A) * P(B)$$

Вероятность появления нескольких событий, независимых в совокупности, вычисляется по формуле:

$$P(A_1A_2...A_n) = P(A_1)...P(A_n).$$

**Теорема умножения вероятностей зависимых событий.** *Вероятность совместного появления двух зависимых событий равна произведению одного из них на условную вероятность второго:*

$$P(AB) + P(A) * P_A(B) = P(B) * P_B(A).$$

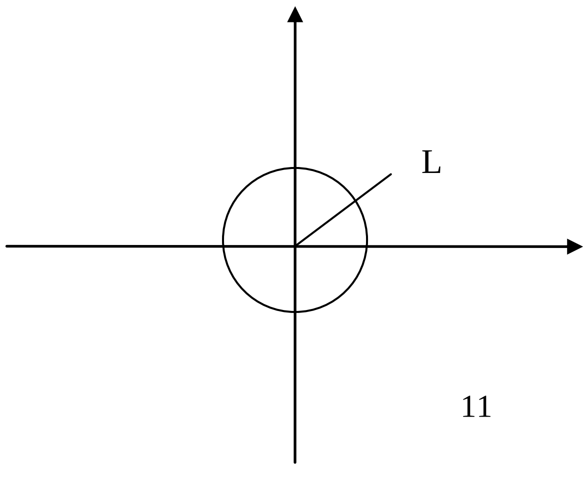
1.Рабочий обслуживал два автомата, работающих независимо друг от друга. Вероятность того, что в течение часа первый автомат потребует внимания рабочего, равна 0.8, а для второго автомата эта вероятность равна 0.7. Найдите вероятность того, что в течение часа ни одни из автоматов не потребует внимания рабочего.

2.В урне находится 6шаров, из которых три белых. Наудачу вынуты один за другим два шара. Найдите вероятность того, что оба шара окажутся белыми.

3.В урне находится 10 белых и 6 чёрных шаров. Найдите вероятность того, что три надутых шара окажутся черными.

### *2.5. Тригонометрия*

Пусть одна из сторон угла ось OX, вершина угла совпадает с началом координат На луче L на расстояние R=1 взята A которая образует единичную окружность, а отрезок OA образует угол.



Углы в тригонометрии измеряются в градусах и радианах

$$\alpha^{\circ}=\frac{180^{\circ}*\alpha рад}{\pi} \qquad \alpha рад=\frac{\pi*\alpha \text{o}}{180}$$

$1' = \frac{1}{60^{\circ}}$ - Минута

$1'' = \frac{1}{60^{\circ}}$ - Секунда

Пример: записать в градусной мере углы

$$\alpha=\frac{\pi}{6}=30^{\circ}$$

$$\alpha^{\circ}=\frac{180^{\circ}*\frac{\pi}{6}}{\pi}=30$$

$$\alpha=\frac{\pi}{8}$$

$$\alpha^{\circ}=\frac{180*\frac{\pi}{8}}{\pi}=\frac{180}{8}=22{,}5=22\frac{1}{2}=22\frac{30}{60}=22^{\circ}30$$

$1)\alpha=30^{\circ}$

$$\alpha рад=\frac{\pi}{6}$$

$$\alpha рад=\frac{\pi*30^{\circ}}{180}=\frac{\pi}{6}$$

Луч L можно вращать в двух направлениях:1)Придвижении луча по часовой угол будет отрицательным.2)При движении луча против часовой стрелки угол будет положительный

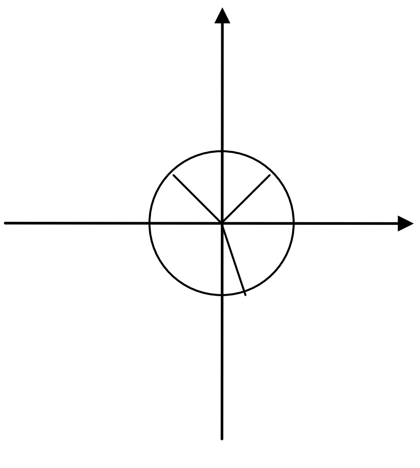
Пример построить на единичной окружности углы

$\alpha=45^{\circ}$

$\alpha=\text{-}\,60^{\circ}$

$\alpha=150^{\circ}$

$\alpha=-210^{\circ}$



$$\alpha = \frac{\pi}{3} \qquad \alpha^\circ = \frac{180^\circ * \frac{\pi}{3}}{\pi}$$

$$\alpha = \frac{5\pi}{6} \qquad \alpha^\circ = \frac{180 * \frac{5\pi}{6}}{\pi}$$

$$\alpha = \frac{7\pi}{3} \qquad \alpha^\circ = \frac{180 * \frac{7\pi}{3}}{\pi}$$

$\alpha = 60^\circ$

$\alpha = 120^\circ$

$\alpha = 225^\circ$

$$\alpha рад = \frac{\pi * 60^\circ}{180} = \frac{\pi}{3}$$

$$\alpha рад = \frac{\pi * 120}{180} = \frac{2\pi}{3}$$

$$\alpha рад = \frac{\pi * 225}{180} = \frac{25\pi}{20} = \frac{5\pi}{4}$$

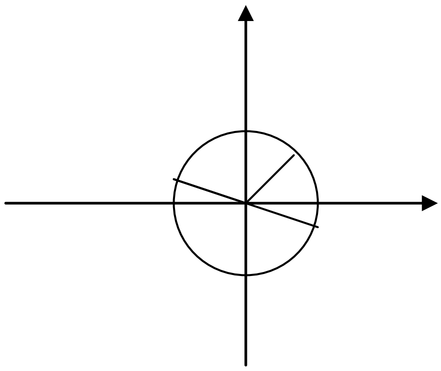
$\alpha = 30^\circ$

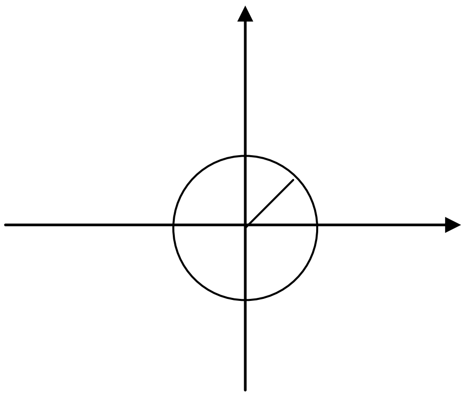
$\alpha = -30^\circ$

$\alpha = 210^\circ$

$\alpha = -20^\circ$

$\alpha = -190^\circ$





Синусам угла $\alpha$ называется ордината угла А

$\sin\alpha = y$

$\cos\alpha = x$

Тангенсом угла $\alpha$ называется отношение ординаты точки А и её абсциссе.

Катангтенс угла $\alpha$ называется отношение абсциссы к ординате точки А.

Найти значение тригонометрических функций по заданной точке

1) $А(\frac{5}{13};\frac{12}{13})$

$\sin\alpha = \frac{12}{13}$

$\cos\alpha = \frac{5}{13}$

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{12}{13} : \frac{5}{13} = \frac{12}{5}$

$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{5}{12}$

2) A($-\frac{4}{5}; -\frac{3}{5}$) $\sin\alpha = -\frac{3}{5}$ $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$

$\operatorname{tg}\alpha = -\frac{3}{5} * (\frac{5}{3}) = \frac{3}{4}$

$\operatorname{ctg} = -\frac{4}{5} * (-\frac{5}{3}) = \frac{4}{3}$

3) B($-\frac{9}{41}; \frac{40}{41}$) $\sin\alpha = \frac{40}{41}$ $\cos\alpha = -\frac{9}{40}$

$\operatorname{tg}\alpha = -\frac{40}{41} * (-\frac{41}{9}) = -\frac{40}{9}$

$\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{9}{40} * \frac{41}{40} = -\frac{9}{40}$

## *2.6. Периодичность тригонометрических функций*

$\sin\alpha = \sin(\alpha + 2\pi k),\ k \in Z$

$\cos\alpha = \cos(\alpha + 2\pi k),\ k \in Z$

$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}(\alpha + \pi k), k \in Z$

$\operatorname{ctg}\alpha = \operatorname{ctg}(\alpha + \pi k), k \in Z$

$f(\alpha - \lambda) = f(\alpha) = f(\alpha + \lambda)$

Вычислить:

1) cos $360^0$=cos($360^0$*10+60)=cos60=

2) 2cos4,5n + sin (19n/3) =

3) sin(-300) – tg(150)=

82 1 )sin2(x+2)=

2 )cos3(x+2)=

3 )cos72 30 =

4 )sin 900=

5 )sin 180=

6) ctg750=

7) sin1843=

8) sin 6.2n+cos 4.1n=

9) cos(2n*2+0.1n)=

Задания:

Поставьте знак

$\sin 170 > 0$

$\cos 300 > 0$

$tg160 < 0$

$ctg315 < 0$

$\sin\frac{3\pi}{4} < 0$

$tg\frac{8\pi}{3} < 0$

$tg450 > 0$

$\sin 400 > 0$

$\sin\frac{7\pi}{3} > 0$

$\cos\frac{4}{3} < 0$

$\cos\frac{7\pi}{5} < 0$

$ctg\frac{9\pi}{4} > 0$

1) $\sin 100 \times \sin 120 > 0$

2) $\cos 210 \times \sin 210 > 0$

3) $\cos 200 \times \sin 110 < 0$

4) $tg140 \times tg220 < 0$

5) $\cos 315 \times tg215 > 0$

6) $\sin 320 \times \cos 125 > 0$

Вычислить:

$\cos(-\pi)\sin(\frac{\pi}{2}) =$

$\sin(-\frac{3\pi}{2}) = \cos\pi$

$-\sin\frac{\pi}{2}(-\sin\frac{3\pi}{2}) =$

$2\cos(-\pi) =$

$\cos(-2\pi)\sin(-\frac{3\pi}{2}) =$

$ctg(\frac{\pi}{2}) + tg\pi - \sin(\frac{3\pi}{2} - \cos(-\frac{\pi}{2}) + \sin 0 =$

$\sin(\frac{\pi}{2}) - \cos(\frac{3\pi}{2}) + \cos 1 - tg1 + ctg(\frac{3\pi}{2}) =$

$2\sin(\frac{\pi}{3}) + 2\cos(\frac{\pi}{4}) - 3 + tg(\frac{\pi}{3}) + ctg(\frac{3\pi}{2}) =$

$\sin^2(\frac{\pi}{4}) - 2\cos^2(\frac{\pi}{3}) - 5tg(\frac{\pi}{4}) =$

| | I четверть | | | | | II четверть | | | | III четверть | | | | IV четверть | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0 | 30 | 45 | 60 | 90 | 120` | 135 | 150 | 180 | 210 | 225 | 240 | 270 | 300 | 315 | 330 | 360 |
| | 0 | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\frac{3\pi}{4}$ | $\frac{5\pi}{4}$ | $\pi$ | $\frac{7\pi}{6}$ | $\frac{5\pi}{4}$ | $\frac{4\pi}{3}$ | $\frac{3\pi}{2}$ | $\frac{5\pi}{3}$ | $\frac{7\pi}{4}$ | $\frac{11\pi}{6}$ | $2\pi$ |
| Sin A | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | -1 | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ | 0 |
| Cos A | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | -1 | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1 |
| Tg a | 0 | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 1 | $\sqrt{3}$ | - | $-\sqrt{3}$ | -1 | $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 0 | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 1 | $\sqrt{3}$ | - | $-\sqrt{3}$ | -1 | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 0 |
| Ctg a | - | $\sqrt{3}$ | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 0 | $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ | -1 | $\sqrt{3}$ | - | $\sqrt{3}$ | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 0 | $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ | -1 | $\sqrt{3}$ | - |

## *2.7. Основные тригонометрические тождества*

Есть де функции от одних и тех же аргументов имеют одну и ту же область определения и принимают равные значения при всех допустимых значениях аргументов, то они называются тождественно равными.

Равенства справедлива при всех допустимых значениях аргументов, называется тождеством.

Переход от данной функции к тождественно равной функции ей называется тождественным преобразованием функций.

При доказательстве тригонометрических тождеств обычно применяют следующие приёмы

1) производят преобразования над любой частью равенства
2) преобразуют одновременно обе части доказываемого тождества пока не станет очевидным, что в обеих частях получились тождественно равные выражения
3) используют свойства пропорции о равенстве произведений крайних членов, убеждаются в равенстве этих произведений

Основные тригонометрические тождества:

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$tg\alpha * tg\alpha = 1, \quad \alpha \neq \frac{\pi\kappa}{2}, \kappa \in z$

$1 + tg^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}, \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi\kappa; \kappa \in z$

$1 + ctg^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha,} \alpha \neq \pi\kappa, \kappa \in z$

| Данная функция | Искомая функция | | | |
|---|---|---|---|---|
| | $\sin\alpha$ | $\cos\alpha$ | $tg\alpha$ | $ctg\alpha$ |
| $\sin\alpha$ | $\sin\alpha$ | $\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$ | $\frac{\sin\alpha}{\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}}$ | $\frac{\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sin\alpha}$ |
| $\cos\alpha$ | $\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$ | $\cos\alpha$ | $\frac{\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha}$ | $\frac{\cos\alpha}{\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}}$ |
| $tg\alpha$ | $\frac{tg\alpha}{\pm\sqrt{1+tg^2\alpha}}$ | $\frac{1}{\pm\sqrt{1+tg^2\alpha}}$ | $tg\alpha$ | $\frac{1}{tg\alpha}$ |
| $ctg\alpha$ | $\frac{1}{\pm\sqrt{1+ctg^2\alpha}}$ | $\frac{ctg\alpha}{\pm\sqrt{1+ctg^2\alpha}}$ | $\frac{1}{ctg\alpha}$ | $ctg\alpha$ |

Задачи:

Дано: $\sin\alpha = \frac{3}{5}; \frac{\pi}{2} < 2 < \pi$

Вычислить: $1)\cos\alpha; 2) tg\alpha; 3) ctg\alpha.$

Дано: $\cos\alpha = -\frac{12}{13}; \pi < 2 < 3\frac{\pi}{2}$

Вычислить: $1)\sin\alpha; 2) tg\alpha; 3) ctg\,2\alpha$ .

Дано: $tg\alpha = -\frac{3}{4}; \frac{\pi}{2} < 2 < \pi$

Вычислить; 1) $ctg\alpha$; 2) $\cos\alpha$; 3) $\sin\alpha$ .

Дано: $ctg\alpha = \frac{8}{15}; 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

Вычислить: 1) $tg\alpha$; 2) $\sin\alpha$; 3) $\cos\alpha$ .

Упростить выражение: 1) $\frac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha} + tg\alpha$; 2) $\sin^4\alpha + \cos^4\alpha + 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha$.

Докажите тождество:

1) $\sin^2\alpha + tg^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 + tg\alpha^2 = \frac{1}{\cos^2\alpha}$

2) $\sin^4\alpha - \cos^4\alpha + \cos^2\alpha = (\sin^2\alpha - \cos^2\alpha) * \left(\frac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{1}\right) + \cos^2\alpha =$

$= \sin\alpha^2 - \cos^2\alpha + \cos^2\alpha = \sin^2\alpha$

3) $\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} + \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{\sin\alpha(1-\cos\alpha) + \sin\alpha(1+\cos\alpha)}{(1+\cos\alpha)*(1-\cos\alpha)} = \frac{\sin\alpha - \sin\alpha\cos\alpha + \sin\alpha + \sin\alpha\cos\alpha}{(1+\cos\alpha)(1-\cos\alpha)} =$

$= \frac{2\sin\alpha}{1^2 - \cos^2\alpha} = \frac{2\sin\alpha}{1-\cos^2\alpha} = \frac{2\sin\alpha}{\sin^2\alpha} = \frac{2}{\sin\alpha}$

## *Решение задач*

Вычислить

№1

1) 3tg 930° + sin 1200° - cos 1410° =
2) cos 510° - sin 480° + cos 840° - sin 1230° =
3) sin($-\frac{13\pi}{6}$)+ cos($\frac{17\pi}{3}$)+ tg($\frac{22\pi}{3}$)- ctg($\frac{37\pi}{4}$)=

№2

1) $\frac{\cos^2(\frac{3\pi}{2} - 2)}{tg^2(\alpha - 2\pi)} + \frac{\cos^2(-\alpha)}{tg^2(\alpha - \frac{3\pi}{2})} =$

## *Решите уравнение*

1) $\cos^2(\pi - x) + 8\cos(\pi + x) + 7 = 0$

Упростить

1) cos ($\frac{\pi}{4}$) cos ($\frac{\pi}{6}$) - sin ($\frac{\pi}{4}$ sin $\frac{\pi}{6}$)=
2) sin($\frac{\pi}{3}$) cos($\frac{\pi}{4}$)- cos($\frac{\pi}{3}$) sin($\frac{\pi}{4}$)=
3) sin(a+b)- sin(a-b)=
4) cos($\frac{\pi}{3}$+a) cos($\frac{\pi}{3}$-a)- $\cos^2 a$ =
5) sin($\frac{\pi}{4}$+x) sin($\frac{\pi}{4}$-x)+ $\sin^3 x$ =
6) sin2x- cos2x*tgx=

## *2.8. Знаки, числовые значения и свойства четными и нечетными тригонометрических функций*

Функция y=f(x) называется четной, если при всех значениях и область определения это функции f(-x)=f(x).Функция y=f(x) называется нечетной, если при всех значениях x из области определения этой функции f(-x)=-f(x) sin(-a)=-sin a cos(-a)=cos a.

| Функция | I<br>0<a<2 | II<br>2<a< $\pi$ | III<br>$\pi$ <a< $\pi$ /2 | IV<br>3 $\pi$ /2<a<a/ $\pi$ |
|---|---|---|---|---|
| sin a | + | + | - | - |
| cos a | + | - | - | + |
| tg a | + | - | + | - |
| ctg a | + | - | + | - |

Задачи:
№1
1)Сравнивая определенных концов дуг 2 $\pi$ /3 и 3 $\pi$ /4 находим sin (3 $\pi$ /4)>0.
2)Сравнивая обсциси концов дуг 2 $\pi$ /3 и 3 $\pi$ /4, получим cos (2 $\pi$ /3).
3)Сравнивая ординаты точки на оси тангенсов имеем tg (2 $\pi$ /3) - tg (3 $\pi$ /4)<0
4)Сравнивая общие точки на оси котангенсов, получим ctg (2 $\pi$ /3) – ctg (3 $\pi$ /4).

№2
1)90 $^o$ < 150 $^o$ <180 $^o$ (II ч) cos 150 $^o$ < 0
2)270 $^o$ < 320 $^o$ <360 $^o$ (IV ч) sin 320 $^o$ <0
3)180 $^o$ < 220 $^o$ < 270 $^o$ (III ч) tg 220 $^o$ > 0
4)360 $^o$ < 400 $^o$ < 360 $^o$ + 90 $^o$ (I ч) ctg 400 $^o$ > 0
Упростить
1) $\sin^2(-a) - \cos(-a) + tg(-a)$
2) $\sin(-\frac{3\pi}{2}) + \cos(-\pi) + tg(-2\pi)$
№3
В какой чертвети может оканчиваться дуга a, если
1) $tg(-a) = -tga$
2) $ctg(-a) = -ctga$
3) $\sin(a-a) > 0$

## *2.9. Тригонометрические функции половинного аргумента*

$$\sin\frac{a}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos a}{2}}$$

$$\cos\frac{a}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos a}{2}}$$

$$\text{tg}\ \frac{a}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos a}{1+\cos a}}, a \neq n(2k+1)$$

$$tg\frac{a}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos a}{1-\cos a}}, a \neq 2nк.$$

$$\operatorname{tg}\frac{a}{2}=\pm\frac{\sin a}{1+\cos a},a\neq n(2n\kappa)$$

$\operatorname{tg}\frac{a}{2}=\frac{1-\cos a}{\sin a}$, в левой части а$\neq n(2\kappa-1)$ при правой а$\neq n\kappa$

$tg\frac{a}{2}=\frac{1+\cos a}{\sin a}$, в левой части а$\neq n\kappa$ . в правой части а$\neq$ $n\kappa$

$$tg\frac{a}{2}=\frac{\sin}{1-\cos a},a\neq 2n\kappa$$

cos a=$\frac{1-tg(a/2)}{1+tg(a/2)},a\neq n(2\kappa+1)$

tg a=$\frac{2tg(a/2)}{1-tg(a/2)},a\neq n(2\kappa+1)$

$$tga=\frac{1-tg(a/2)}{ztg(a/2)},a\neq n\kappa$$

Задача 1
Дано:

cos z=- 7/25
$n\kappa\langle z\langle n$
$\sin(z/2),\cos(z/2)$
$\operatorname{tg}(z/2)$.

$$\mathrm{Sin}\frac{z}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\lambda}{2}}=\sqrt{\frac{1+\frac{7}{25}}{2}}=\sqrt{\frac{32}{25}}=\sqrt{\frac{16}{25}}=\frac{4}{5};\cos\frac{z}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos z}{2}}-\sqrt{\frac{1-\frac{7}{25}}{2}}=\sqrt{\frac{9}{25}}=-\frac{3}{5};$$

Задача 2
Дано:

sin z=-15/18
$3\,n/2\langle z\langle 2n$
$\sin(z/2),\cos(z/2)$
$\operatorname{tg}(z/2)$

$$\sin\frac{z}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos z}{2}}$$

$$\cos^2 z+\sin^2 z=1$$

$$\cos^2 z+\left(\frac{15}{12}\right)^2=1$$

$$\cos^2 z+\frac{225}{289}=1$$

$$\cos z = 1 - \frac{225}{285} = \frac{289-225}{289} = \frac{64}{284}.$$

$$\sin\frac{z}{2} = \pm\sqrt{\frac{z-\frac{8}{12}}{z}} = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{9}{17} * \frac{1}{2} = \sqrt{\frac{9}{34}};$$

## *Тригонометрические функции алгебраической суммы двух аргументов*

Для нахождения тригонометрических функций суммы и разности двух аргументов применяются следующие формулы.

Sin ( A + B) = sin A cos B + cos A sin B
Sin (A – B) = sin A cos B – cos A sin B
Cos (A + B) = cos A sin B – sinA cos B
Cos (A – B) = cos A sin B + cos A sin B

Tg (a + b) = $\frac{tga+tgb}{1-tgatgb}$ , a $\neq \frac{\pi}{2}$(2k + 1), b $\neq \frac{\pi}{2}$ - (2k + 1), tg a * tg b $\neq$ 1

Tg (a - b) = $\frac{tga-tgb}{1+tgatgb}$ , a $\neq \frac{\pi}{2}$(2k + 1), b $\neq \frac{\pi}{2}$ (2k + 1), tg a * tg b $\neq$ -1

Ctg (a + b) = $\frac{ctga*ctgb-1}{ctga+ctgb}$ , a$\neq$ $\pi k$ , b$\neq$ $\pi k$ , 2$\neq$ -b + $\pi k$

Ctg (a - b) = $\frac{ctga*ctgb+1}{ctga-ctgb}$ , a$\neq$ $\pi k$ , b$\neq$ $\pi k$ , 2$\neq$ b + $\pi k$

Пример:
sin (a+b)=?
sin a= $\frac{3}{5}$
cos b= -$\frac{5}{13}$
$\frac{\pi}{2} < a < \pi$
$\pi < b < \frac{3\pi}{2}$

1) sin(a+b) 4sin(a-b), если cos a= $\frac{4}{5}$, sin b= -$\frac{3}{5}$, $\frac{3\pi}{2} < a < 2\pi$

Вычислить

№1 Sin(a+ b) 4 sin( a-b), если cos a = $\frac{4}{5}$, sin b = -$\frac{3}{5}$, $\frac{3\pi}{2}$ < a < 2 $\pi$ , $\pi$ < b < $\frac{3\pi}{2}$

№2 Преобразуйте в произведение
1) $cos(\pi/3)-\cos(2\pi/3)$
2) $cos 20^{o} + \sin 50^{o}$

№3

$\sin 16^{o} + \sin 26^{o} - \sin 42^{o}$

№4 Докажите тождество

1) $1+\sin\alpha+\cos\alpha = 4\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\pi}{4}\cos(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2})$

2) $\sin\alpha+\cos\alpha-1 = 2\sqrt{2\sin\frac{\alpha}{2}}\cos(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2})$

3) $2\cos^2\alpha+\cos\alpha-1 = 2\cos(3\alpha/2)\cos(\alpha/2)$

Д/З

cos(a+b) и cos(a-b), если sin a= $\frac{8}{7}$, cos b=$\frac{3}{5}$, $\frac{\pi}{2} < a < \pi$ и $\frac{3\pi}{2} < b < 2\pi$

### *2.10. Тригонометрические функции удвоенного аргумента*

Sin 2$\alpha$ = 2 sin $\alpha$ cos $\alpha$
Cos os2$\alpha$ = c$^2$ $\alpha$ - sin$^2$ $\alpha$
Tg 2$\alpha$ = $\frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}$ , $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi$ k , $\alpha \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$
Ctg 2$\alpha$ = $\frac{ctg^2\alpha - 1}{2ctg\alpha}$ , $\alpha \neq \frac{\pi k}{2}$
Cos 2$\alpha$ = 2 cos$^2$ $\alpha$ - 1

Cos 2$\alpha$ = 1- sin$^2$ $\alpha$

Вычислить:

1) sin2$\alpha$

2) 2sin$\alpha$

3)1+cos2$\alpha$

4) $\frac{1+\cos 2\alpha}{1-\cos 2\alpha}$

5) $\frac{\sin 2\alpha - \sin\alpha}{1-\cos 2+\cos 2\alpha}$

***Практическое занятие***
Вычислите:
№ 1
Sin 2a, cos 2a и tg 2a, если: 1) sin a= -3/5 и π‹a‹3π/2;
2) cos a=5/13 и 3π/2‹a‹2π; 3) tg a= -3/4 и π/2‹a‹π.

№ 2

1) ctg z, если tg(z/2)=5/3; 2) sin 3a, cos 3a и tg 3a, если sin(3a/2)= -5/13 и π‹a‹3π/2; 3) cos 4x и tg 4x, если tg x=1/5 и π‹x‹3π/2.

№ 3

1) $2\sin^2 a+\cos 2a=1$; 2) 1+cos2a= $2\cos^2 a$;

3) $\frac{1+\cos 2a}{1-\cos 2a}=ctg^2 a$; 4) $\frac{\sin 2a-\sin a}{1-\cos a+\cos 2a}$ = tg a

5) $\cos^4 a+\sin^4 a=1-0{,}5\sin^2 2a$;

6) $\cos^6 a+\sin^6 a=1-0{,}75\sin^2 2a$;

7) $\frac{1+\sin 2a}{\cos 2a}=\frac{\sin a+\cos a}{\cos a-\sin a}$; 8) $\frac{\sin^3 a+3a}{\cos^3 a-\cos 3a}$;

9) $\frac{1-\cos 2a+\sin 2a}{1+\cos 2a+\sin 2a}=tga$; 10) $\frac{2-\sin 4actg 2a}{\sin 4a}=tg 2a$;

11) $\frac{\sin 3a}{\sin a}-\frac{\cos 3a}{\cos a}=2$; 12) $\frac{1+\cos 2a}{\cos 2a}\bullet\frac{1+\cos 4a}{\sin 4a}=ctga$

13) cos 4a+4cos2a+3=8 $\cos^4 a$

№ 4

1) sin 2x-sinx=0; 2)sinx$\cdot\cos x=1/2$; 3) $\cos^2 x-\sin^2 x=1$

## *2.11. Формулы приведения*

Формулы приведения позволяют выразить тригонометрическую функцию углов. $n/2\pm a, n\pm a, 3n/2\pm a, 2n\pm a$ через тригонометрическую функцию углов a.

При применении формул приведения рекомендуется пользоваться правилами.

1) Если a откладывается от оси ox, то наименование приводимой функции, т. е. функция аргумента $\frac{\pi}{2}\pm\alpha, \pi\pm\alpha, \frac{3\pi}{2}\pm\alpha, 2\pi\pm\alpha$ заменяется на похожее

2) Знак, в котором нужно брать тригонометрическую функцию в правой части, находится по знаку левой части в приложении, что $0\langle a\langle\frac{\pi}{2}$

| № | функция | sin | cos | tg | ctg |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | -a | -sin a | cos a | -tg a | -ctg a |
| 2 | $\frac{\pi}{2}-a(90^\circ-a)$ | cos a | sin a | ctg a | tg a |
| 3 | $\frac{\pi}{2}+a(90^\circ-a)$ | cos a | -sin a | -ctg a | -tg a |
| 4 | $\pi$ -a (180$^\circ$-a) | sin a | -cos a | -tg a | -ctg a |
| 5 | $\pi$ +a (180$^\circ$+a) | -sin a | -cos a | tg a | ctg a |
| 6 | $\frac{3}{\pi}-a(270^\circ-a)$ | -cos a | -sin a | ctg a | -tg a |
| 7 | $\frac{3}{\pi}+a(270^\circ-a)$ | -cos a | -cos a | -ctg a | -ctg a |
| 8 | $\frac{2}{\pi}-a(360^\circ-a)$ | -sin a | cos a | -tg a | -ctg a |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 9 | $\frac{2}{\pi}-a(360^{o}-a)$ | sin a | cos a | tg a | ctg a |

1)90$^\bullet$+45$^\bullet$ 2) cos 70$^\bullet$ $= \cos(90^{o}-20^{o}) = \sin 20^{o} = 0.3420$

180$^\bullet$ $= \pi$

270$^\bullet$ $= \frac{3\pi}{2}$

360$^\bullet$ $= \frac{\pi}{2}$

1) cos 150$^\bullet$=cos(180$^\bullet$-30$^\bullet$)=cos 30$^\bullet$ $= \sqrt{\frac{3}{2}}$
2) tg 135$^\bullet$=-1
3) sin 120$^\bullet$ $= \sqrt{\frac{3}{2}}$
4) tg 220$^\bullet$=tg 40$^\bullet$
5) ctg 200$^\bullet$=ctg 20$^\bullet$
6) sin 210$^\bullet$ $= \frac{1}{2}$
7) tg 352$^\bullet$=-ctg 35$^\bullet$
8) sin 345$^\bullet$=sin 15$^\bullet$

Вычислить

1) cos 225$^\bullet$ =
2) sin 150$^\bullet$ =
3) tg 210$^\bullet$ =
4) tg 225$^\bullet$ =
5) cos 315$^\bullet$ =
6) tg 120$^\bullet$ =
7) ctg 150$^\bullet$ =
8) sin 220$^\bullet$ =
9) cos 230$^\bullet$ =
10) tg 250$^\bullet$ =
11) sin 315$^\bullet$ =
12) cos 340$^\bullet$ =

***Практическое занятие***

№1

$1)\cos 150^{o},2)tg135^{o};3)\sin 120^{o};4)ctg130^{o};5)\cos 210^{o};6)\sin 260^{o};7)tg220^{o};8)ctg200^{o};$

$9)\sin 210^{o};10)\sin 350^{o};11)\cos 280^{o};12)tg340^{o};13)ctg325^{o};14)\sin 345^{o};15)\cos 295^{o};16)tg335^{o}$

№2

$1)\cos 225^{o};2)\sin 150^{o};3)ctg210^{o};4)tg225^{o};\ p5)\cos 315^{o};6)tg120^{o};7)ctg150^{o};8)\sin 220^{o};9)\cos 230^{o};$

$10)tg250^{o};11)\sin 315^{o};12)\cos 340^{o}$

№3

$1)\sin 9135^{o}+\cos(-585^{o})+tg1395^{o}+ctg(-630^{o});$

$2)\sin(-810^{o})+\cos(-900^{o})+tg(-395^{o})ctg575^{o};$

$3)\sin(-2383^{o})-\sin(-2023^{o})+\cos(-485^{o})-\cos(-125^{o});$

$4)3tg930^{o}+\sin 1200^{o}-\cos 1410^{o};$

$5)con510^{o}-\sin 480^{o}+\cos 840^{o}+\sin 1230^{o};$

№4

$$1)\frac{\cos^2(3\pi/2-\alpha)}{tg^2(\alpha-2\pi)}+\frac{\cos^2(-\alpha)}{tg(\alpha-3\pi/2)}=1;$$

$$2)\frac{\sin(\pi-\alpha)}{ctg(\pi/2-\pi)}*\frac{tg(\alpha-\pi)}{ctg(\pi+\alpha)}*\frac{\cos(2\pi-\alpha)}{\cos(3\pi/2-\alpha)}=\sin\alpha;$$

$$3)\frac{1-ctg^2(\alpha-3\pi/2)}{ctg(\alpha+\pi/2)}*\frac{tg(\alpha-\pi/2)}{1-ctg^2(\alpha-2\pi)}=-1$$

№5

$1)\cos^2(\pi-x)+8\cos(\pi+x)+7=0$

$2)2\cos(x-\pi)+3\sin(\pi+x)=0$

$3)2\sin^2 x+5\sin(3\pi/2-x)-2=0$

$4)5\cos^2(x-3\pi/2)-2\cos(x-\pi/2)=0$

$5)3\sin^2(x-3\pi/2)-\cos(x+4\pi)=0$

## *2.12. Тригонометрические уравнения*

**Простейшими тригонометрическими уравнениями, является уравнения вида:**

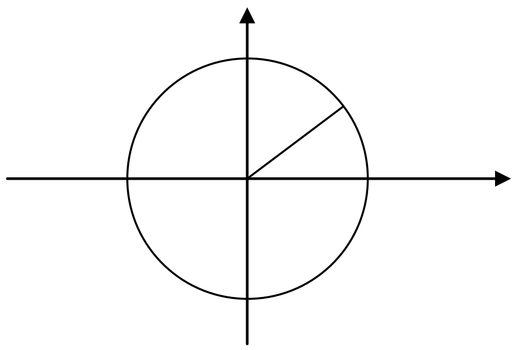
**1)sinx=m**

$x=(-1)^n*\arcsin(m)+\pi\kappa,\kappa\in z$

пример1 :

$\sin x=\frac{1}{2}$

$x=(-1)^n*\arcsin\frac{1}{2}+\pi\kappa,\kappa\in z$



**Частные случаи:**

1)sinx = -1

$x=-\frac{\pi}{2}+2\pi\kappa,\kappa\in z$

$2)\sin x=0$

$x=\pi\kappa,\kappa\in z$

$3)\sin=1$

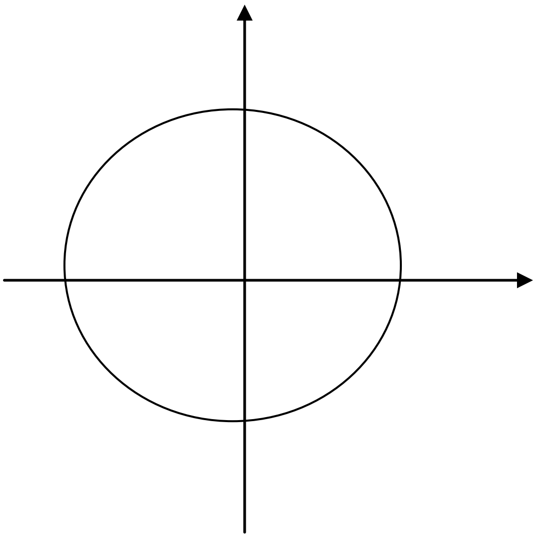
$x=\frac{\pi}{2}+2\pi\kappa,\kappa\in z$

**пример2:**

$\cos x = m$

$x = \pm \arccos m + 2\pi\kappa, \kappa \in z$

Пример $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$



X=$\pm$ arccos $\frac{\sqrt{2}}{2} + 2\pi k, k \in z$

X=$\pm \frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in z$

Частные случай.

1) cosx=1

x=$\pm \pi + 2\pi\kappa, k \in z$

2) cosx=0

x=$\frac{\pi}{2} + \pi$ k, k$\in z$

3) cosx=1

x=2$\pi$ k, k$\in z$

tgx=m

x=arctg m+$\pi$ k, $k \in z$

Пример

Tgx=$\sqrt{3}$

X=arctg$\sqrt{3} + \pi \in$

X=$\frac{\pi}{3} + \pi k, k \in z$ .

Частный случай.

Tgx=0

X=$\pi$ k,k$\in$z

4.tgx=m

X=arcctgm+$\pi$ k,k$\in$z

Пример

Ctgx=1

X=arcctg1+$\pi$ k

X=$\frac{\pi}{4} + \pi$ k,k$\in$z

Частный случай

Ctgx=0

X=$\frac{\pi}{2} + \pi$ k,k$\in$z

Задачи

1) cosx=$\frac{1}{2}$

X=$\pm \arccos\frac{1}{2}+2\ \pi$ n, n$\in$z.

X=$\pm\frac{\pi}{3}+2\pi\eta$ ,n$\in$z.

2) cosx=$\frac{\sqrt{2}}{2}$

X=$\pm\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}+2\pi$ n, n$\in$z.

X=$\pm\frac{\pi}{4}+2\pi$ n, n$\in$z

5) cosx=-0,3

7) Tgx=$\frac{\sqrt{3}}{3}$

8) Tgx=1

9) Tgx=1,327

№1

1)sin$^2$ x=$\frac{1}{2}$

2)sin$^2$ x=1

№2

cos$^2$ x=1

2) $\sqrt{\cos^2 x=\sqrt{\frac{1}{2}}}$

Д/з

№1

3) sinx=$\frac{-\sqrt{3}}{3}$

4) sinx=$\frac{\sqrt{3}}{2}$

5) cosx=$\frac{-\sqrt{3}}{2}$

№2

3) ctgx=2,05

4) ctgx=$\frac{\sqrt{3}}{3}$

Решите уравнение
$Cos^2 x$-cosx-2=0
$5ctg^2 x$-8ctg+3=0
$2sin^2 x$+3cosx-3=0
$3sin^2 x+ cos^2 x$-2=0
$sin^2 x-5cosx^2 x$+2=0
$sin^2 x-cos^2 x$=cosx
cos2x=1

домашнее задание
tg(x-n/2)=1
tg(2x+n/2)=-1

### *2.13. Тригонометрические неравенства*

Sin x < m, Sin x > m; Cos x < m, Cos x > m; tg x < m, tg x > m; ctg x < m, ctg x > m.

Множество значений тригонометрических функций:
$-1 \le \sin x \le 1$
$-1 \le \cos x \le 1$
$-\infty \le tg\ x \le \infty$
$-\infty \le ctg\ x \le \infty$
Примеры:
$\sin x < \frac{1}{2} \quad -1 \le \sin x \le \frac{1}{2} \quad \frac{3\pi}{2\pi k} + \frac{\pi}{k} \le x < \frac{\pi}{6}$ ; $k \in z$

$\sin x < 0 \quad -1 \le \sin x < 0 \quad \frac{3\pi}{2} + \pi k < 0 + \pi k$, $k \in z$

$\sin x > 0 \quad 0 < \sin x \le 1 \quad 0 + \pi k \le \frac{\pi}{2} + \pi k$

$\sin x < -\frac{1}{2} \quad -1 \le \sin x < -\frac{1}{2} \quad \frac{3\pi}{2} + \pi k \le x < \frac{4\pi}{6}$

$\sin x > -\frac{1}{2} \quad -\frac{1}{2} < \sin x < 1 \quad \frac{7\pi}{6} + \pi k < x \le \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in z$

$\sin x > \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} < \sin x \le 1$

$Tg3\ x > -1 \quad -1 < tg\ 3x < \infty \quad \pi k + \frac{3\pi}{4} < 3x < \frac{\pi}{2} + \pi k \quad \frac{\pi k}{3} + \frac{3\pi}{12} < x < \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{3}$

$\sin x > -1 \quad -1 \le \sin x < 1 \quad \pi k + \frac{3\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} + \pi k$

$\sin x < -\sqrt{\frac{2}{2}} \quad \frac{3\pi}{2} + \pi k < x < \frac{\pi}{2} + 2\pi k$

$\sin x < -\sqrt{\frac{2}{2}} \quad -1 \le \sin x < -\sqrt{\frac{2}{2}} \quad \frac{3\pi}{2} + 2\pi k \le x < \frac{5\pi}{4} + \pi k$

ЗАЧЕТНАЯ РАБОТА

Ctg x > - $\sqrt{3}$ 3 sin($\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6}$) = $\frac{3}{2}$ cos 2x + tg x = 0

3 sin$^2$ x+ 2 sin x cos x – 5 cos$^2$ x =0

***Решение задач***

1)

$\cos^2 x - \cos x - 2 = 0$

2)

$5ctg^2 x - 8ctg + 3 = 0$

3)

$3\sin^2 x + \cos^2 x - 2 = 0$

4)

$\sin^2 x - 5\cos^2 x + 2 = 0$

5)

$tgx + ctgx = 0$

Домашнее задание

1)

$\cos 2x = 1$

2)

$tg^2 x = 1$

3)

$ctgx = 3$

4)

$\cos 2x = 1$

5)

$2\sin x + 3\cos x - 3 = 0$

***Решение задач***

$$y = \frac{\sin^2 x - 3\cos^2 x}{2\sin^2 x + \cos^2 x}$$

$еслиtgx = 3$

2)

$$y = \frac{3\sin^2 + x + \cos^2 x - 1}{\sin^2 x - \sin x * \cos x + 2}$$

$еслиtg = 1$

3)

$\sin^4 a + \sin^2 a * \cos^2 a + \cos^2 a$

Домашнее задание

1)

$(ctg\alpha+1)^2+(ctg\alpha-1)^2$

2)

$\cos\alpha+\sin{*}\,tg\alpha-\dfrac{1}{\cos\alpha}=0$

3)

$tg^2\alpha(1+tg^2\alpha)+(1+ctg^2\alpha)-(1-tg\alpha)^2$

## *2.14. Преобразование произведения тригонометрических функций*

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right]$$

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\right]$$

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right]$$

**Вычисление:**

1) cos7x cos5x=

2) sin11x 2sin2=

3) sin5x cos2x=

4) $\sin(\alpha-\beta)\cos(\alpha-\beta)=$

5) $\cos(\alpha+\beta)\cos(2\alpha+\beta)=$

Повторение:

$1)\cos 765^\circ=$

$2)\sin\alpha-?;\cos\alpha=-\dfrac{12}{13}$

$\pi<\alpha<\dfrac{3\pi}{2}$

$3)\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha-\beta)=$

$4)\dfrac{\sin(-\alpha)+\cos(\pi+\alpha)}{1+2\cos(\frac{\pi}{2}-2)\cos(-\alpha)}=$

## *2.15. Преобразование суммы тригонометрических функций*

sin a+sin b= 2 sin $\dfrac{a+b}{2}$ cos $\dfrac{a-b}{2}$;

sin a –sin b =2 cos $\dfrac{a+b}{2}\sin\dfrac{a-b}{2}$;

cos a + cos b= 2 cos $\dfrac{a+b}{2}\cos\dfrac{a-b}{2}$;

cos a- cos b= 2 sin $\dfrac{a+b}{2}\sin\dfrac{b-a}{2}$;

tg a +tg b= $\dfrac{\sin(a+b)}{\cos a\cos b},a\neq\dfrac{n}{2}+n\kappa,b\neq\dfrac{n}{2}+n\kappa$

tg a- tg b= $\dfrac{\sin(a-b)}{\cos a\cos b},a\neq\dfrac{n}{2}+n\kappa,b\neq\dfrac{n}{4}$

1+cos a= 2 sin $\frac{a}{2}$.

1-cos a=2 sin $\frac{a}{2}$.

1+ sin a=2 cos $(n/4 - a/2)$.

1-sin a= 2 sin $(n/4 - a/2)$.

| x | -2$\pi$ | $\frac{-3\pi}{2}$ | -$\pi$ | $\frac{-\pi}{2}$ | 0 | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$ | $\frac{3\pi}{2}$ | 2 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| y | 0 | -1 | 0 | -1 | 0 | 1 | 0 | -1 | 0 |

Задачи

1)cos(a/3) – cos(a/3)

2) cos b- sin a

3)2 cos $^2$ a-sin2a

4)cos 20+ sin 50

Задачи

1)1+sin $\alpha + \cos\alpha = 4\cos\alpha/2\sin\alpha/4$

2)sin(x+ $n/3$) cos(x- $n/6$ )=1

3)(1-sin $^2 x$) *3/4-sin $^2$ x*1/4=1

4)sin$\left(x+\frac{n}{3}\right)$sin$\left(x-\frac{n}{3}\right) = -\frac{1}{4}$

### *2.16. Построение графиков тригонометрических функций*

График y=sinx

1) О.О.Ф: x-любое
2) М.З.Ф: y $\in$[-1,1]
3) Период 2$\pi$ (360)
4) Sin(-x)=-sinx (нечетное)

Sin(-2$\pi$ )= -sin2$\pi$

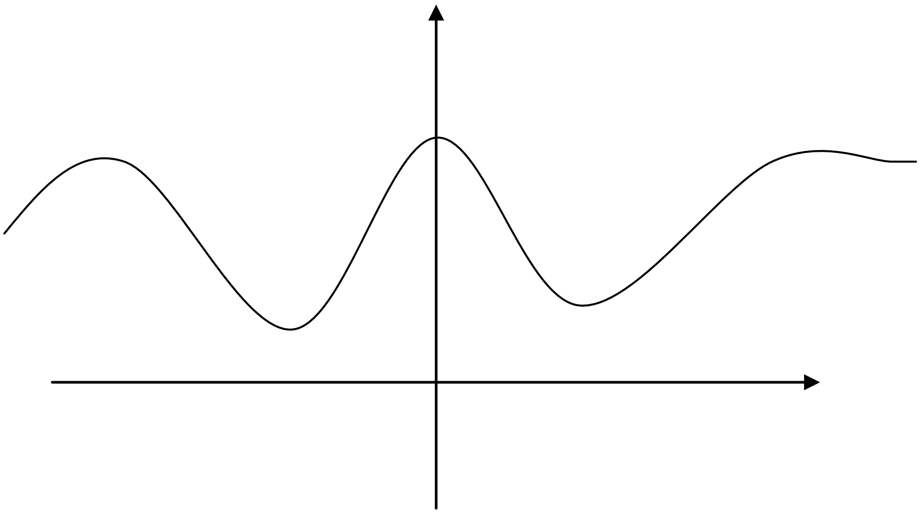
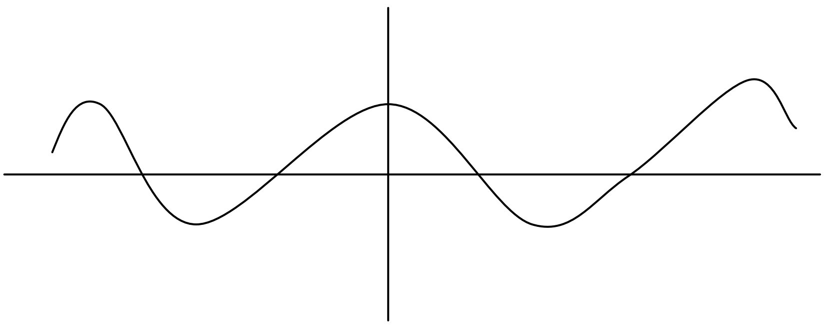


График
y= cosX

1) О.О.Ф: X-любое
2) М.З.Ф: y$\in$[ -1;1]
3) период 2$\pi$ (360)
4)cos (-x)=cosX
Четная

| X | -2$\pi$ | $\frac{-3\pi}{2}$ | $-\pi$ | $\frac{-\pi}{2}$ | 0 | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$ | $\frac{3\pi}{2}$ | 2$\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| y | 1 | 0 | -1 | 0 | 1 | 0 | -1 | 0 | 1 |

cos(-2$\pi$ )=cos 2$\pi$

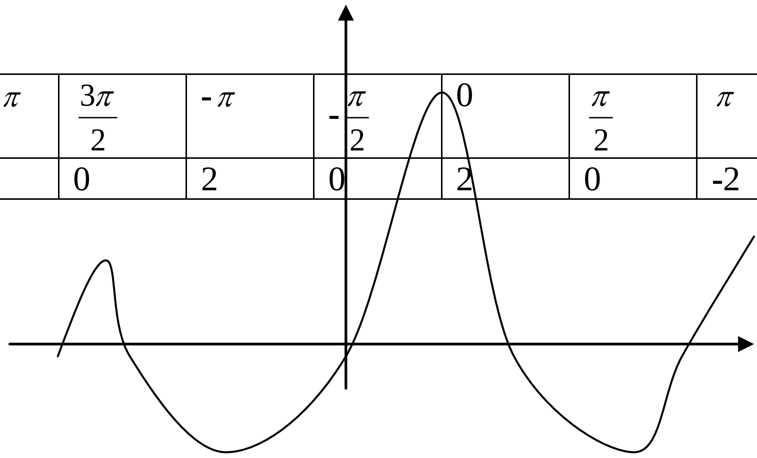


1) y=3sinx

| x | -2 | $\frac{-3\pi}{2}$ | $-\pi$ | $\frac{-\pi}{2}$ | 0 | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$ | $\frac{3\pi}{2}$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| y | 0 | 3 | 0 | 3 | 0 | 3 | 0 | 3 | 0 |

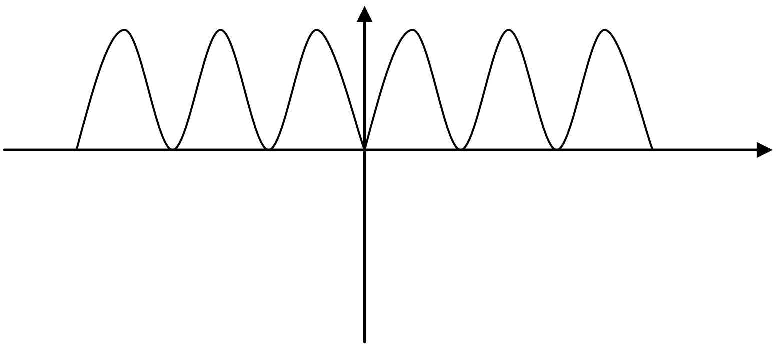
2) y=2cosX

| X | $-2\pi$ | $\frac{3\pi}{2}$ | $-\pi$ | $-\frac{\pi}{2}$ | 0 | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$ | $\frac{3\pi}{2}$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| y | 2 | 0 | 2 | 0 | 2 | 0 | -2 | 0 | 2 |



3) $y = -\frac{1}{3}\sin x$

| X | $-2\pi$ | $\frac{-3\pi}{2}$ | $-\pi$ | $\frac{-\pi}{2}$ | 0 | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$ | $\frac{3\pi}{2}$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Y | 0 | $\frac{1}{3}$ | 0 | $\frac{1}{3}$ | 0 | $-\frac{1}{3}$ | 0 | $\frac{1}{3}$ | 0 |



Д/З

Построить график y=cos(x+$\frac{\pi}{3}$)

## 2.17. *Обратные тригонометрические функции*

Функция $y = \sin x$ на отрезок $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ имеет обратную функцию, которая называется арксинусом и обозначается $y = \arcsin x$

$$-1 \le D(\arcsin x) \le 1; ,-\frac{\pi}{2} \le E(\arcsin x) \le \frac{\pi}{2}$$

$\arccos(-\frac{\sqrt{3}}{2}) =$

$\arccos(-\frac{\sqrt{3}}{2}) =$

$arctg\sqrt{3} =$

$\arcsin 0.0788 =$

$\arccos 0.4363 =$

$arctg\, 2.145 =$

$\sin(\arcsin x) = x$

Функция $y = \cos x$ на отрезке $0 \le x \le \pi$ имеет обратную функцию, которая называется арккосинусом и обозначается $y = \arccos x$

$-1 \le D(\arccos x) \le 1; ,-\frac{\pi}{2} \le E(\arccos x) \le \pi$

$\cos(\arccos x) = x$

$\arccos(-x) = \pi - \arccos x$

$y = arctg$

$D(arctg) = R$

$-\frac{\pi}{2} \le E(arctg) \le \frac{\pi}{2}$

$tg(arctgx) = x$

$y = ctg$

$y = arcctg$

$D(arcctg) = R$

$0 \le E(arcctg) \le \pi$

### *Решение задач*

Проверить справедливы ли равенства

1) $\arccos(-3\sqrt{3}) = \frac{5\pi}{6}$

2) $\arcsin(\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{6}$

3) $srctg\sqrt{3} = -\frac{\pi}{3}$

Вычислить $\begin{array}{l} \arcsin 0.788 \\ \arccos 0.9063 \\ \arcsin 2.145 \\ arcctg\, 0.9657 \end{array}$

Проверить справедливы ли равенства:

$\arcsin(2\sqrt{2}) = \frac{\pi}{4}$

$\arcsin 1 = \frac{\pi}{6}$

$\arccos(3\sqrt{2}) = \frac{\pi}{6}$

$\arccos(2\sqrt{2}) = \frac{3\pi}{4}$

$arcctg 1 = \frac{\pi}{4}$

$arctg \sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$

Вычислить:

$\arcsin 0.4067$

$\arcsin 0.996$

$\arccos 0.9848$

$\arccos 0.1736$

$arctg\, 0.2676$

$arctg\, 2.747$

Д/з

$\sin(19\frac{\pi}{3}) - \cos(19\frac{\pi}{3}) =$

$\sin 1843 =$

$\frac{\sin 3.927}{\cos 3.927} =$

### *2.18. Производные*

Вычисление производной функции y=f(x)производится по общему правилу дифференцирования:

1) придавая аргументы x приращение $\Delta x$ и подставляя в выражение функции вместо аргумента x приращение $\Delta x$ и подставляя в выражение функции вместо аргумента x наращенное значение x+$\Delta$x

Находим наращенное значение функции: y+$\Delta$y=f(x+$\Delta$x)

2)Вычитая из наращенного значения функции ее первоначальное значение, находим приращение функции : $\Delta$y=f(x+$\Delta$x)-f(x)

3)Делим приращение функции Ay на приращение аргумента $\Delta$x, т.е составляем отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$

4)Находим предел этого отношения при $\Delta x$=0, т .е $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ Этот предел и есть производная от функции y=f(x)

Производная функции f(x) в точке x называется предел отношения приращения $\Delta x$ аргумента, когда последнее стремится к нулю:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x0+\Delta x) + (x0)}{\Delta x}$$

Функция f(x) имеющая производную в каждой точке некоторого промежутка называется дифференцируемой в этом промежутке

Для производной функции y=f(x) употребляется следующие обозначения; y; $y'(x)$; $\frac{dy}{dx}$ или f; $f'(x)$; $\frac{df(x)}{dx}$ нахождение производной называется дифференцированием.

Основ правила дифференцирования . производные степени и корни

Обозначение : c- постоянна; x- аргумент; w- функции от x, имеющие производные .

Основные правила алгебраической суммы функций

Производная алгебраической суммы

$(u+v-n)' = u' + v' - w'$

Производная произведения двух функций

$(uv)' = u'v + v'u$

Производная произведения трех функции

$(uvw)' = u'vw + u'vw + w'uv$

Производная произведения постоянной на функцию

(Си) $'$=Си$'$

Производная частного (дроби)

$$(\frac{u}{v}) = \frac{uv - vu}{v^2}$$

Таблица производных

| Функция | Производная |
|---|---|
| 1.C-число | 0 |
| 2. cx | C |
| 3. x | 1 |
| 4.$x^m$ | n*$x^{m-1}$ |
| 5.$a^x$ | $a^x$*$\ln a$ |
| 6.$e^x$ | $e^x$ |
| 7.lnx | $\frac{1}{x}$ |
| 8.$\frac{1}{x}$ | -$\frac{1}{x}$ |
| 9.log $a^x$ | $\frac{1}{x * \ln a}$ |
| 10.cos x | -sinx |
| 11.sinx | cosx |
| 12.tg x | $\frac{1}{\cos^2 x}$ |
| 13.ctgx | $\frac{1}{ctg^2 x}$ |

1)y=$x^4$

2)y=2x $^{3}$
3) $y = 3x^{-5}$
4)y=-3x $^{-2}$
5) $y = x\frac{7}{5}$
6)y=4x $^{\frac{3}{2}}$
7)y=5x $^{-\frac{3}{5}}$
8)y=2 $\sqrt{x^3 = 2 * x^{\frac{3}{2}}}$
9)y= $\sqrt{x^{-3}}$ =x $-^{\frac{3}{4}}$
10)y= $\sqrt[3]{x^{-2}} = x^{\frac{2}{3}}$
11)y= $-\frac{1}{x^2} = -x^{-2}$
12)y= $\frac{3}{x^{\frac{4}{3}}} = 3 * x^{-\frac{4}{3}}$
13)y=- $\frac{1}{x^2} = -x^2$
14)y= $\frac{3}{x^{\frac{4}{3}}}$
15)y= $\frac{3}{\sqrt{x^3}}$
16)y=2x $^{3}$* $\sqrt[3]{x}$
17)y= $\frac{x^4}{\sqrt{x}}$
18)y= $\frac{2x^3}{\sqrt{x^3}}$
19)y= $\frac{6^3\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$
20)y= $\sqrt[4]{\frac{1}{x^3}}$
21)y= $\sqrt[-3]{\frac{1}{x^{-2}}}$

### *2.19. Физические приложения производной*

При прямолинейном движении точки скорость v в данный момент времени t=t0 есть производная $\frac{ds}{dt}$ от пути по времени t, вычисленная при t=t0. Ускорение a в данный момент времени t=t0 есть производная $\frac{dv}{dt}$ от скорости v по времени t, вычисленная при t=t0 .

пусть s- путь, t-время, v-скорость, a- ускорение.

задачи

1) дано: $s = 2t^3 + t^2 - 4, t = 4c$, найти скорость и ускорение точки через 4 с?

2) дано: $s = 6t - t^2, t = 3c$, найти скорость и ускорение точки через 3 с?

3) дано: $s = 0{,}2t^2, t = 10c$, найти скорость точки через 4 с?

4) дано: $s = 3t^2 + t + 4, m = 10кг$, найти кинетическую энергию точки через 4 с? ($E = \frac{mv^2}{2}$)

5) дано: $s = t^3 + 5t^2 + 4, t = 2c$, найти скорость и ускорение точки через 2 с?

6) дано: $s = \sqrt{t}, t = 1c$, найти скорость и ускорение точки через 1 с?

7) дано: $s = t^2 + 11t + 30, t = 3c$, найти скорость и ускорение точки через 3 с?

самостоятельная работа:

1) дано: $s = t^2 + t - 1, t = 3c$, найти скорость и ускорение точки через 3 с?

2) дано: $s = t^2 + 5t + 1, t = 3c$, найти ускорение точки через 3 с?

### *2.20. Точки перегиба*

Точки графиков функций y=f(x), разделяющая промежутки выпуклость противоположных направлений этого графика, называется точкой перегиба.

Точками перегиба могут быть служить только критические точки, принадлежавшие области определения функции y=f(x), в которых вторая производная $f''(x)$ обращается

в нуль или терпит разрыв.

Если при переходе через критическую точку $x_{01}$ вторая производная $f''(x)$ меняет знак, то график функций перегиба $(x_0 : f(x_0))$

Правило нахождения точек перегиба графика функции $y = f(x)$

1) Найти вторую производную $f''(x)$.

2) Найти критические точки функции $y = f(x)$, в которых $f''(x)$ образующиеся в нуль или терпит разрыв.

3) Исследовать знак второй производной $f''(x)$ в промежутках, на которые найденные критические точки делят области определения функции $f(x)$. Если при этом критическая точка $x_0$ разделят промежутки выпуклости противоположенных направлений , то $x_0$ является абсциссой точки перегиба функций.

4) вычислить значения функции в точках перегиба.

Пример:

$F(x) = 6^2 - x^3$

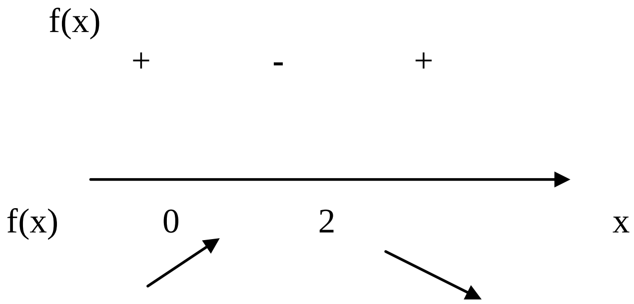
$f'(x) = 12x - 3x^2$

$f''(x) = 12 - 6x$

$12 - 6x = 0$

$-6x = 12$

$x = 2$




12-6=6 > 0

f(2) = 6(2)$^2$ = (2)$^3$ = 24 – 8 = 16

$\frac{1}{3}x^3 - 3x^2 - 3x^2 + 8x - 4 = ?$

f(x)= $x^4 - 10x^3 + 36x^2 - 100 = ?$

f(x) = $x^4 - 8x^2 + 18x^2 - 4 + 31 = ?$

## *2.21. Построение графика функции*

1) Найти область определения функций
2) Выяснить, не является ли функция четной или нечетной f(-x)=f(x)-четная

($y=x^2$ : $y(-x) = (-x^2) = x^2 = y(x)$)

F(-x)=-(x) нечет.

($y=x^3$ : $y(-x)=(-x)^3 = -x^3 = -y(x) -$ нечет.), и периодической (sin;cos; tg;ctg)

3) Найти точки пересечения графика с осями координат (если это не вызывает затруднения)
4) Найти асимптоты графика функций
5) Найти промежутки монотонности функций и ее экстремум
6) Найти промежутки выпуклости графика и точки перегиба
7) Построить график функций, используя полученные результаты исследования

ПРИМЕР

$Y=x^3 - 6x^2 + 9x - 3$

1) ООФ x-любое число
2) $Y(-x)=(-x)^3 - 6(-x)^2 + 9(-x) - 3 = -x^3 - 6x^2 - 9x - 3$ общего вида

3)пересеч. с. оу:x=0

$y=0^3 - 6 * 0^2 + 9 * 0 - 3 = -3$

(0;-3)

4) $y=3x^2 - 12x + 9$

$3x^2 - 12x - 9 = 0$

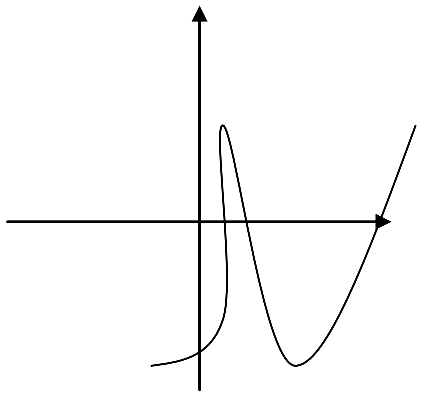
$1x^2 - 4x + 3 = 0$

$x_1=3$ $x_2=1$

| x | x<1 | 1` | 1<x<3 | 3 | x>3 |
|---|---|---|---|---|---|
| y | + | 0 | - | 0 | + |
| y | ↗ | 1 | ↘ | -3 | ↗ |

$Y(1)=1^3 + 6 \cdot 1^2 + 9 \cdot 1 - 3 = 1$

$Y(3)=3 \cdot 3^2 = 12 \cdot 3 + 9 = -3$



Задача: Построить график функции
1) Y= $2x^2 - 8x$

2) y=-3x $^2$+12$x$

### *2.22. Приложения производной к исследованию функции*

Функция y=f(x) называется возрастающей в промежутке $a < x < b$ если для $x_1$ и $x_2$ принадлежащих этому промежутку и таких что $x_1 < x_2$ имеет место неравенств $f(x_1) < f(x_2)$

Как возрастающие, так и убывающие функции называются монотонными, а промежутки, в которых функция возрастает или убывает,- промежутками монотонности.

1) $f(x) = x^2 - 8x + 12$ $\quad$ 2) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 4$

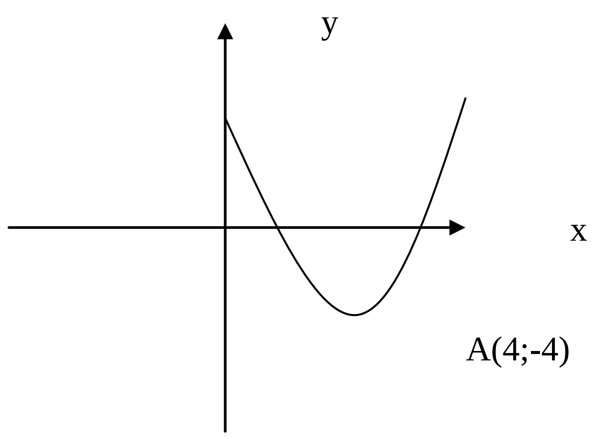
$f(x) = 2x - 8$ $\quad$ $(2x - 8 = 0) \Leftrightarrow (x = 4)$

| x | -∞<x<4 | 4 | 4<x<∞ |
|---|---|---|---|
| f'(x) | - | 0 | + |
| f(x) | ↓ | | ↑ |

x=0

2)f'(x)=3x $^2$ -12x (3x $^2$ -12x=0)

x=4



| x | $-\infty<x<0$ | $0<x<4$ | 4 | $4<x<\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| f'(x) | + | - | 0 | + |
| f(x) | ↑ | ↓ | | ↑ |

№3

1) $f(x)=x^2-6x+5$

$f'(x)=1*2*x^{2-1}-6*1+0$

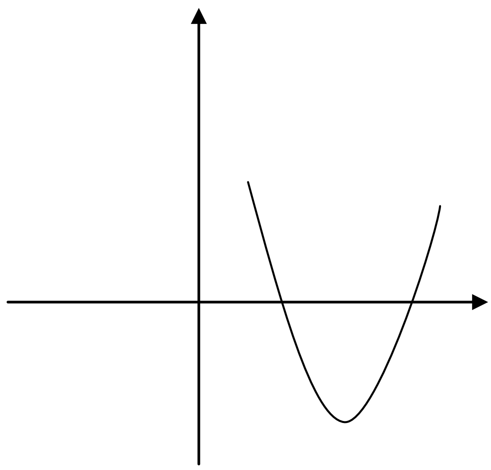
$2x-6=0$

$2x=6/2$

$x=3$

| x | $-\infty<x<-3$ | 3 | $3<x<\infty$ |
|---|---|---|---|
| f'(x) | - | 0 | + |
| f(x) | ↓ | -4 | ↑ |

$f(x)=3^2-6*3+5=-4$



Посторoить график

2) $f(x)=2x^2-4x+5$

№5

1) $f(x)=x^4-4x+3$

№6

1) $f(x)=2x^3-9x^2+12x-15$

2) $f(x)=-2x^3+15x^2-36x+20$

### *2.23. Исследование функции на экстремум с помощью первой производной*

Точка x из области определения функции f(x) называется точкой минимума этой функции, если существует такая $\delta$ - окрестность $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ точки $x_0$, что для всех $x \neq x_0$ из этой окрестности выполняется неравенство $f(x) \geq f(x_0)$.

Точка $x_0$ из области определения функции $f(x)$ называется точкой максимум этой функции, если существует такая $\delta$- окрестность $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ точки $x_0$, что для всех $x \neq x_0$ из этой окрестности выполняется неравенство $f(x) \leq f(x_0)$.

Точки минимума и максимума функции называется экстремальными точками данной функции, а значения функции в этих точках - минимумом и максимумом (или экстремумами) функции.

Точками экстремума могут служить только критические точки, т.е точки , принадлежащие области определения функции , в которых производная f(x) обращается в нуль или терпит разрыв.

Если при переходе через критическую точку $x_0$ производная $f'(x)$ меняет знак, то функция $f(x)$ имеет в точке $x_0$ экстремум минимум в том случае, когда производная меняет знак с минимума на плюс, и максимум когда с плюса на минус. Если же при переходе через критическую точку $x_0$ производная $f'(x)$ не меняет знака, то функция $f(x)$ в точке $x_0$ не имеет экстремума.

Правило нахождения экстремумов функции $y = f(x)$ с помощью первой производной.

1) Найти производною $f'(x)$.

2) Найти критические точки функции $y = f(x)$ т.е точки, в которых $f'(x)$ обращается в нуль или терпит разрыв .

3) Исследовать знак производной $f'(x)$ в промежутках, на которые найденные критические точки делят область определения функции $f(x)$. При этом критическая точка $x_0$, если точка минимума, если она отделяет промежуток, в котором $f'(x) < 0$, от промежутка, в котором $f'(x) > 0$ и точка максимума в противном случае. Если же в соседних промежутках, раздельной критической точке $x_0$, знак производной не меняется, то в точке $x_0$ функция экстремума не имеет.

## *2.24. Исследование функции на экстремум с помощью второй производной*

Если есть производная от функции y= f(x) то производная, от y то x, (если она существует) называется второй производной употребляется следующие обозначение:

y, yx $\frac{a^2 y}{ax^2}$ или f(x) $\frac{a^2 f(x)}{ax^2}$.

Правило нахождения экстримом функции y=f(x) с помощью второй производной.

1) Найти производную f(x)
2) Найти критические точки данной функции, в которой f(x)=0
3) Найти вторую производную f(x)
4) Исследовать знак второй производную в каждой из критических точек.

Если при этом вторая производная окажется отрицательной то функции, в какой точки имеет максимум, а если положительной, то – минимум. Если же вторая производная равна нулю, то экстремум функция надо искать с помощью первой производной.

5)Вычислить значение функции в точках экстремума.

Пример:

f (x)=x$^3$ - 9x$^2$ + 24x – 12.

1) f$''$(x) = 3x$^2$ - 18x + 24

$3x^2 - 18x + 24 = 0$ /:3

2) $x_2 - 6x + 8 = 0$

$x_1 = 4 \quad x_2 = 2$

Крит. точки

3) $f''(x) = (3x^2 - 18x + 24) = 6x – 18$

4) $f''(4) = 6 * 4 – 18 = 6 > 0$ $x = 4$ – min

$f \min (4) = 4^3 - 9 * 4^2 + 24 * 412 = 4$

$f (2) = 6 * 2 – 18 = -6 < 0$ $x = 2$- max.

$f \max (z) = 2^3 - 9 * 2 + 24 * 2 – 12 = 8$

***Задания.***

Найти точки максимума и минимума функции:

$f (x) = 2x^2 - 5x + 2$

$f (x) = -x^2 + 4x$

$f (x) = 1/3x^3 - 2x^2 + 3x + 4$

$f'(x) = 1/3x^3 - 3x^2 + 5x + 5$

### *2.25. Наименьшее и наибольшее значение функции*

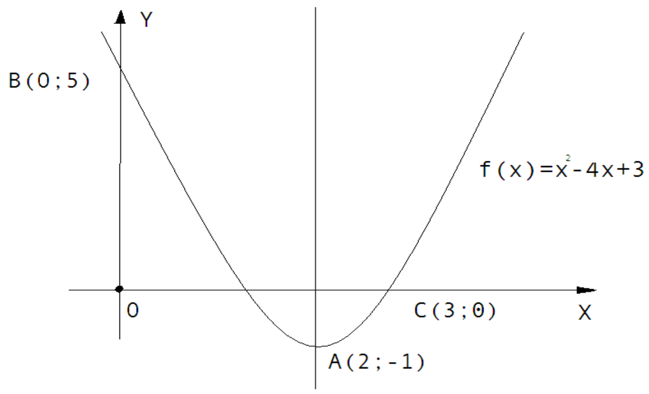
Для нахождения наименьшего и наибольшего значений функции, непрерывной в некотором промежутке, необходимо:

1) найти критические точки, принадлежащие заданному промежутку, и вычислить значения функции в этих точках;
2) найти значения функции на концах промежутка;
3) сравнить полученные значения; тогда наименьшее и наибольшее из них являются соответственно наименьшим и наибольшим значением функции в рассматриваемом промежутке.

Пример. Найти наименьшее и наибольшее значение функции $f(x) = x^2 - 4x + 3$ в промежутке $0 \le x \le 3$.

Имеем $f(x) = 2x - 4$; $2x - 4 = 0$ т.е x=2 – критическая точка. Находим $f(2) = -1$; далее, вычисляем значения функции на концах промежутках ; $f(0) = 3$, $f(3) = 0$.

Итак, наименьшее значение функции равно-1 и достигается ею во внутренней точке промежутка, а наибольшее значение равно 3 и достигается на левом конце промежутка.



Задачи:

Найдите наименьшее и наибольшее значения функций в заданных промежутках.

1) $f(x)=x^2-6x+13, 0\le x\le 6$;  2) $f(x)=8-0{,}5x^2, -2\le x\le 2$.

1) $f(x)=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3, 11\le x\le 3$;  2) $f(x)=6x^2-x^{y-}, -1\le x\le 6$,

1) $f(x)=x^3-3x^2-9x+35, -4\le x\le 4$; 2) $f(x)=-x^3+9x^2-24x+10,\ 0\le x\le 3.$

### *2.26. Неопределенный интеграл*

Основные формулы интегрирования.

Функция F(a) называется первообразной для функции f(x) в промежутке a$\le \chi \le \beta$ , в любой точке этого промежутка её производная равна F(x).

F(x) = f(x)$\Rightarrow$d F(x)=f(x)dx ; a$\le$x$\le$b.

Отыскание первообразной функции по заданной её производной f(x) или по дифференциалу f(x)dx есть действия , обратное дифференцированию ,-Совокупность первообразных для функции f(x) или для дифференциала f(x)dx называется неопределенным интегралом и обозначается символом sf(x)dx . Таким образом $\int f$ (x)dx=f(x)+C если d$\begin{bmatrix} F(x)+C \\ \end{bmatrix}$=f(x)dx.

Здесь F(x)-подынтегральная функция; F(x)dx-подынтегральное выражение; C-произвольная постоянная.

Приведем основные свойства неопределенного интеграла.

1.Неопределенный интеграл от дифференциала функции равен этой функции плюс произвольная постоянная: $\int d$ F(x)=F(x)+C

2. Дифференциал неопределенного интеграла равен подынтегральной функции.

D $\int F$ (x) dx =f(x) dx.  ($\int f$ (x) dx) =f(x).

3. Неопределенный интеграл алгебраической суммой функций равен алгебраической сумме неопределенных интегралов этой функции.

4. Постоянный множитель подынтегрального выражения можно выразить за знак неопределенного интеграла.

$\int a$ f (x)dx=a$\int f$ (x)dx.

5. Если Sf(x)dx=F(x)+C и n= $\varphi$(x)-любая производная функция имеющая непрерывную производную то $\int f$ (n)du =F(u) + C

Таблица неопределенных интегралов

1. $\int 0\cdot dx=C$.
2. $\int dx=x+C$.
3. $\int x^k dx=\frac{x^{k+1}}{k+1}+C \quad (k\ne -1, k-const)$.
4. $\int \frac{dx}{x}=\ln|x|+C$.
5. $\int a^x dx=\frac{a^x}{\ln a}+C \quad (a>0, a\ne 1)$.
6. $\int e^x dx=e^x+C$.
7. $\int \sin x dx=-\cos x+C$.

8. $\int \cos x dx = \sin x + C$.

9. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$.

10. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$.

11. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$.

12. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C$.

13. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C$.

14. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 + a} \right| + C$

Свойства неопределенного интеграла:

1. Если $a$ – постоянная величина, то $\int a \cdot f(x) dx = a \int f(x) dx$.
2. $\int [f_1(x) + f_2(x) - f_3(x)] dx = \int f_1(x) dx + \int f_2(x) dx - \int f_3(x) dx$
3. $d[\int f(x) dx] = f(x) dx$.
4. $[\int f(x) dx]' = f(x)$.
5. $\int dF(x) = F(x) + C$.

## НЕПОСРЕДСТВЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ.

Вычислить

$\int x^3 dx$

$\int (7X^5 + 6x - 4) dx$

$\int 4t^3 dt$

$\int n x^{n-1} dx$

$\int x^3 (1+5x) dx$

$\int (2x-1)^3 dx$

## ИНТЕГРИРОВАНИЕ МЕТОДОМ ЗАМЕНЫ ПЕРЕМЕННОЙ

Существует три метода вычисления интегралов: непосредственное интегрирование, метод замены переменной, метод интегрирования по частям.

Пример.

$$1)\int_0^1 (2+x)^7\,dx = \left|\begin{array}{l} 2+x=t \\ (2+x)'dx=dt \\ dx=dt \\ t_1=2+0=2, t_2=2+1=3 \end{array}\right| = \int_2^3 t^7 dt = \left.\frac{t^8}{8}\right|_2^3 = \frac{3^8}{8}-\frac{2^8}{8} = 804{,}125$$

$$2)\int_0^{\pi\backslash 2} \cos 2x dx = \left|\begin{array}{l} 2x=t, (2x)'dx=dt, 2dx=dt \\ dx=\frac{dt}{2}, t_1=2\cdot 0=0, t_2=2\cdot\frac{\pi}{2}=\pi \end{array}\right| = \int_0^{\pi}\cos t\frac{dt}{2} = \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\cos t dt = \frac{1}{2}\sin t\Big|_0^{\pi} =$$

$$= \frac{1}{2}(\sin\pi - \sin 0) = 0$$

Задачи: вычислить

1) $\int \ x^5 dx$

2) $\int \ (3x+2)^5 dx$

3) $\int \ t^{\frac{1}{5}} dt$

6) $\int \ (5t-1)^4 dt$

7) $\int \ \sqrt[3]{(3x+1)^2 \alpha x}$

***Повторение***

1) $\int x^3$ dx=

2) $\int \frac{dx}{x} =$

3) $\int (\cos x + 4x + 1)dx =$

4) $\int (\sin x - x^4 + 5)dx =$

5) $\int (e^x - 8x)dx =$

6) $\int (2x-1)dx =$

ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПО ЧАСТЯМ.

Формула: $\int udv = u * v - \int vdu$

Пример: sinx dx $\left|\begin{array}{l} u=x \\ du=(x)'=dx \end{array}\right.$ dv=stvx dx v=$\int vxdx = -\cos x =$

=u*v-$\int vdu - x*(\cos x) - \int (\cos x)1dx = -x*\cos x + \int \cos xdx = -x*\cos x + \sin x + C$

Пример2: $\int \frac{Lnx}{x^a}dx =$

$$= \left| \begin{array}{l} U = Lnx, d = \dfrac{dx}{x^2} \\ du = (Lnx)^1 = \dfrac{1}{x}dx \\ U = \int \dfrac{dx}{x^2} = \int x^{-2}dx = \dfrac{x^{-1}}{-1} \end{array} \right.$$

$$\| = U*v - \int vdu - \ln x * \frac{x^{-1}}{-1} - \int \frac{x^{-1}}{-1} x$$

$$x*\frac{1}{x^2}dx = \frac{-\ln x}{x} + \int x^{-2}dx$$

№1 $\int \frac{\ln x}{x^3}dx$

№2 $\int xe^x dx$

## *2.27. Физические приложение первообразной*

$$\boxed{s = \int v(t)dt}$$

Задачи: вычислить путь, пройденный точкой

Дано

T=2

v=$t^5 + 4t + 4$

2) Дано

V=2t-3

S=6 t=0

3) Дано

$a = 12t^2 + 6t$

T=1 s=3

Повторение:

$$\int \frac{x^{3/4} + x^{2/3} + x^{1/2}}{x}$$

$$\int (e^x + 2x)dx$$

$$\int (3^x - e^x - 1 \ )$$

$$\int (\sin x - 5)dx$$

$$\int (4-3\cos x dx)$$

$$\int \cos 4x \, dx$$

## *2.28. Определенный интеграл*

Для вычисления определенного интеграла используют формулу Ньютона-Лейбница

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a)$$

Пример: $1)\int_1^2 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_1^2 = \frac{2^2}{3}-\frac{1^3}{3} = \frac{8}{3}-\frac{1}{3} = \frac{7}{3}$

$$2)\int_{-1}^{2}(x^2+2x+1)dx = (\frac{x^3}{3}+\frac{2x^2}{2}+x)\Big|_1^2 = (\frac{2^3}{3}+2^2+2)-(\frac{(-1)^3}{3}+(-1)^2-1) = \frac{8}{3}+4+2-(-\frac{1}{3}+1-1) =$$

з

$$= \frac{8}{3}+6+\frac{1}{3} = \frac{9}{3}+6 = 3+6 = 9$$

адачи

№1

$1)\int_0^2 x^2 dx =$

$2)\int_1^2 x^3 dx =$

$3)\int_1^3 x^4 dx =$

№2

$1)\int_{-1}^{3}(4x^3-3x^2+2x+1)dx =$

$2)\int_{-1}^{0}(x^3+2x)dx =$

№3

$1)\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{dx}{x^3} =$

$2)\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{x^2} =$

$3)\int_0^4 \sqrt{xdx^2} =$

№4

$$1)\int_1^8 \sqrt[3]{x^2}\,dx =$$

Самостоятельная работа

$$1)\int_0^1 (x^3-4x)dx$$

$$2)\int_4^2 (x^2-2x+1)dx$$

$$3)\int_1^2 \frac{dx}{x^5}$$

***Определенный интеграл***

$$1)\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin x dx$$

$$2)\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos x dx$$

$$3)\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos x - \sin x)dx$$

№1

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} (\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{\sin^2 x})dx$$

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (\frac{1}{\cos^2 x} - \sin x)dx$$

№2 $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

№3 $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2}$

### *2.29. Вычисление определённого интеграла методом замены переменной*

Пример: $\int_3^5 (2x\text{-}1)^3\, dx = \left| \begin{array}{l} 2x-1=t \\ 2x=1+t \\ x=\frac{t}{2}+\frac{1}{2} \\ dx=\left(\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}dt \\ 2x-1=5 \\ 2x-1=3 \end{array} \right| = \frac{1}{2}\int_2^3 t^3 dt = \frac{1}{2}t^4/4 = \frac{1}{2}\left(\frac{3^4}{4}-\frac{2^4}{4}\right) = 8.125$

1.

1) $\int_{4}^{5}(4-x)^{3}\,dx;$

2) $\int_{0}^{1}\frac{dx}{(3x-1)^{4}}$

2

1) $\int_{0}^{3}\sqrt[3]{3x-1}\,dx$

2) $\int_{1}^{5}\sqrt{(2x-1)^{3}}\,dx$

3) $\int_{-2}^{5}\frac{dx}{\sqrt[3]{(x+3)^{2}}}$

3.

1) $\int_{\pi.12}^{\pi/8}\sin 2x\,dx$

2) $\int_{0}^{\pi}\sin\frac{x}{3}\,dx$

3) $\int_{2\pi.9}^{\pi.3}\sin\left(3x-\frac{\pi}{2}\right)dx$

4.

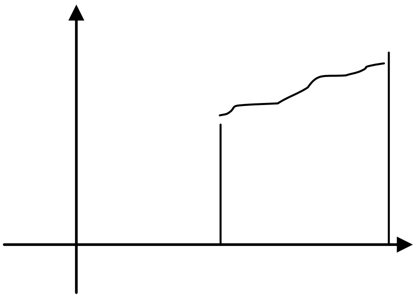
1) $\int_{\pi/6}^{\pi/4}\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)dx$

2) $\int_{\pi/18}^{\pi/12}\cos 3x\,dx$

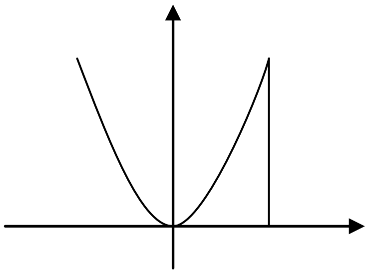
3) $\int_{2\pi/3}^{4\pi/3}\cos\frac{x}{4}\,dx$

### *2.30. Применение определённого интеграла к вычислению площадей фигур*

Пусть дана фигура которая ограничена сверху графиком y= $f(x)$,с боков отрезками x=a, x=b и снизу осью ох. тогда S=$\int_{a}^{b} f(x)dx$.



Пример: y=x $^{2}$ ,x=1 ,x=3 , ось ох S-?



S=$\int_1^3 x^2 dx = \frac{x^3}{3} = \frac{3^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{27}{3} - \frac{1}{3} = \frac{26}{3} = 8\frac{2}{3}$

№1

1) y=$x^2$, y=0,x=0, x=-3 и x=3

2) g=3$x^2$, y=0 ,x=-3 и x=2

№2

1) y=$x^2$+1, y=0, x=-1 и x=2

2) y=0.5$x^2$+2  y=0, x=1 и x=3

№3

$y^2$=x, y$\geq 0$, x=0 и x=3

№4

1) y=-$x^2$-2x+8, y=0

2) y= $1/x, y = 0$, x=1 и x=3