Министерство образования и науки Хабаровского края
Краевое государственное бюджетное
профессиональное образовательное учреждение
«Хабаровский машиностроительный техникум»

Методическая разработка
по учебной дисциплине «Математика: алгебра, начала математического анализа, геометрия»
3 часть

2017

Рассмотрено и одобрено на заседании ЦК «Математического и естественнонаучного цикла» Протокол № ____ «___»_________________ 2017 г. Председатель ЦК _________ Т.А. Новикова	**Рекомендовано** Методический совет Протокол № ____ «___»_________________ 2017 г. Председатель ____________ И.Н. Пухляр

Методическая разработка по учебной дисциплине «Математика: алгебра, начала математического анализа, геометрия» для студентов первого курса специальностей: 08.02.08 «Монтаж и эксплуатация оборудования и систем газоснабжения», 09.02.02 «Компьютерные сети», 13.02.11 «Техническая эксплуатация и обслуживание электрического и электромеханического оборудования (по отраслям)», 15.02.08 «Технология машиностроения», 22.02.06 «Сварочное производство», 38.02.02 «Страховое дело (по отраслям)». Составлено преподавателем КГБ ПОУ ХМТ Кичигиной Н.Х.

Содержание

Раздел 3. Геометрия

3.1. Преобразования прямоугольных координат

1.Параллельный перенос осей координат. Пусть имеются две системы прямоугольных координат с разными началами, оси которых параллельны и одинаковы направлены. Тогда между координатами одной и той же точки в этих системах имеет место зависимость

$$x = x_1 + x_0\,,\ y = y_1 + y_0\,,$$

Где x и y - координаты точки в исходной системе; x_1 и y_1 - ее координаты в новой системе; x_0 и y_0 координаты нового начала O_1 относительно исходной системы (рис.1).

2.Преобразование координат при повороте осей без изменения начала координат. Пусть x и y - исходные координаты a - угол поворота, x_1 и y_1 - координаты той же точки в новой, повернутой системе координат (рис. 116). Тогда

$$x = x_1\cos a - y_1 \sin a\,,\ y = x_1 \sin a + y_1 \cos a$$

И ……(1)

$$x_1 = x\cos a + y\sin a\,,\ y_1 = -x \sin a + y \cos a\,.$$

Задача. Координаты точки в новой системе x_1=3 и y_1= -1, а

Координаты нового начала при сохранении направления осей x_0=2

И y_0 =-3. Найти координаты точки в исходной системе

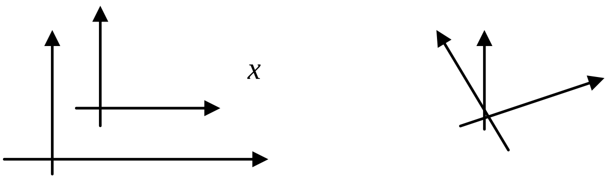


Рис.1

По формулам (1) получим

$$x = x_1 + x_0 = 3+2=5,\ y = y_1 + y_0 =-1+(-3)=-4$$

Задачи:

1.Координаты точки в исходной системе x=-4 и y=2,а

Координаты нового начала при сохранении направления осей x_0=3

И y_0=-1. Найти координаты точки в новой системе координат.

По формулам (1) находим

$$x_1 = x - x_0 =-4-3=-7,\ y_1 = y - y_0 =2-(-1)=3$$

2. Относительно двух систем координат $x\,O_1\,y$ и $x_1\,O_1\,y_1$, имеющих одно и то же направление осей, известны координаты некоторой точки: (-2;3) и (-7;6). Найти координаты начала каждой из этих систем относительно другой.

Полагая x=-2, y=3 и x_1=-7, y_1=6, по формулам (17.20) получим -2=-7+x_0, 3=6+y_0, т.е. x_0=5, y_0=-3. Координаты нового начала в системе $x\ O_1\ y$ таковы: 0(5;-3).

Поменяв местами x и x_1, y и y_1 в формулах (17,20) , получим -7= -2+x_{0_1}, 6=3 y_{0_1} ,т.е. $x_{0_1} = -5, y_{0_1} = 3$. Координаты нового начала в системе $x_1 O_1 y_1$ таковы: $O_1(-5;3)$.

3. Координаты точки в новой системе $x_1 = -2$ и $y_1 = 4$. Найдите координаты этой точки в исходной системе, если при сохранении направления осей начало координат перенесено в точку: 1) (-3;5); 2) (4;-2); 3) (-1;-3); 4) (2;1).

4. Координаты точки в исходной системе x=-2и y=-3.Найдите координаты этой точки в новой системе, если при сохранении направления осей начало координат перенесено в точку: 1) (3;2); 2)(-3;2); 3)(3;-2) 4)(-3;-2)
5. относительно двух систем координат xOy и $x_1O_1y_1$, имеющих одно и то же направление осей, известны точки: (-4;7) и (-8;3). Найдите координаты начала каждой из этих систем относительно другой.
6. две системы координат имеют одинаковое направление осей. Первая система координат относительной второй имеет начало в точке (-3;5). Найдите координаты начала второй системы относительно первой.
7. дана точка A(4;-2). Найдите координаты этой точки в новой системе координат при повороте осей на угол: 1)45^o 2) 30^o

3.2. Прямоугольная система координат

1.Ось. Угол между вектором и осью. Прямая, на которой выбрано положительное направление и задана единица измерения длины, называется осью.
Вектор $\vec{e}$, имеющий длину $|\vec{e}|=1$ и направление , совпадающее с направлением оси , называется *единичным вектором* (ортом) этой оси.
Если $\vec{a}\neq 0$ и $\vec{e}-вектор$ единичной длины , направление которого совпадает с направлением вектора $\vec{a}$ то $\vec{a}=|\vec{a}|\cdot\vec{e}$.
Углом между ненулевым вектором $\vec{a}\neq 0$ и осью l называется угол между направлениями оси вектора: $(\vec{a}\wedge,l)=\varphi$, где $0\le\varphi\le 180^o$
2.Проекция вектора на ось. *Проекцией вектора* на ось называется направленный отрезок на оси, начало которого есть проекция начала вектора и конец – проекция его конца. Длина этого направленного отрезка берется со знаком плюс, если направления отрезка и оси совпадают, и со знаком минус, если их направления противоположны (рис. 2) .
Проекция вектора $\vec{a}\neq 0$ на ось l равна длине этого вектора , умноженной на косинус угла φ между осью и вектором (рис. 1) :

$$np_l\vec{a}=|\vec{a}|\cdot\cos\varphi \qquad (2)$$

Отметим свойства проекций:

$$np_l\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=np_l\vec{a}+np_l\vec{b};np_l(m\vec{a})=m\cdot np_l\vec{a}$$

3.Прямоугольная система координат. Пусть на плоскости задана пара единичных взаимно перпендикулярных векторов $\vec{i}$ и $\vec{j}$, отложенных от некоторого начала – точки O
(рис.2). Такую пару векторов называют

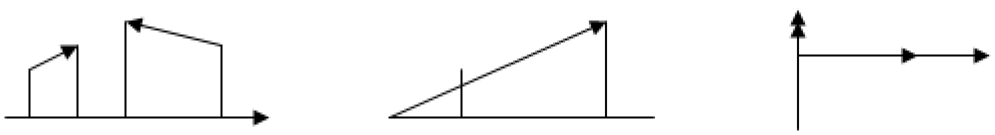


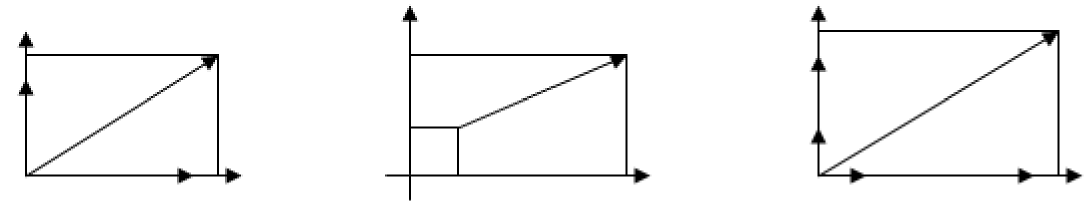
Рис. 2

Прямоугольным базисом на плоскости. Совокупность начала O и прямоугольного базиса $\left(\vec{i},\vec{j}\right)$ называют прямоугольной системой координат на плоскости. Точку O называют началом координат, а векторы $\vec{i}$ и $\vec{j}$ - координатными векторами.

4.Координаты вектора. Вектор, направленный из начала координат в произвольную точку M плоскости xOy, называется радиусом-вектором точки M и обозначается $\vec{r}: \overrightarrow{OM} = \vec{r}$.

Проекция вектора $\vec{r}$ на координатные оси, т.е. пр$_x \vec{r} = x$ и пр$_y \vec{r} = y$, называются координатами вектора.

Координаты вектора $\vec{r}$ кратко записывают так: $\vec{r} = (x : y)$.



Координаты радиуса-вектора $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ являются одновременно координатами точки M, т.е. ко
нца радиуса -векторов $\vec{r}$.

Если начало вектора $\vec{a} = AB$ не совпадает с началом координат, то координаты вектора $\vec{a}$ и координаты его конца различны. В этом случае проекции вектора $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ на оси координат соответственно равны $x = x_b - x_a$ и $y = y_b - y_a$, т.е.

$$\vec{a} = \overrightarrow{AB} = (x; y) = (x_b - x_a; y_b - y_a).$$

5. Разложение вектора по координатным осям. Разложение вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{i}, \vec{j})$ имеет вид

$$\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j},$$

где $\vec{i}$ - единичный вектор на оси Ox, а $\vec{j}$ - единичный вектор на оси Oy. Числа x и y называются координатами вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{i}, \vec{j})$.

Векторы $x\vec{i}$ и $y\vec{j}$ называются составляющими вектора $\vec{a}$ по осям координат.

Если начало вектора $\vec{a}$ находится в точке A($x_a; y_a$)б на конец- в точке B($x_b; y_b$), то разложение вектора $\vec{a}$ записывается в виде

$$\vec{a} = \overrightarrow{AB} = (x_b - x_a)\vec{i} + (y_b - y_a)\vec{j}.$$

6. Правила действий над векторами, заданными своими координатами.
Если в базисе $(\vec{i}, \vec{j})$ заданы векторы $\vec{a} = (x_1; y_1)$ $\vec{b} = (x_2; y_2)$, то:

координаты суммы двух (или более) векторов равны суммам соответствующих координат слагаемых, т.е. $\vec{a} + \vec{b} = (x_1 + x_2; y_1 - y_2)$;

координаты разности двух векторов равны разностям соответствующих координат этих векторов, т.е. $\vec{a} + \vec{b} = (x_1 - x_2; y_1 - y_2)$;

координаты произведения вектора на число равны произведениям соответствующих координат данного вектора на это число, т.е. $m\vec{a} = (mx_1; my_1)$.

7. Условие коллинесарности двух векторов. Условие коллинеарности двух векторов $\vec{a} = (x_1 : y_1)$ b = ($x_2 : y_2$) имеет вид

$$x_1 = mx_2, y_1 = my_2$$

т.е. соответствующие координаты двух векторов пропорциональны, то векторы коллинеарны.

Если m$\rangle$ 0, то векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ имеют одинаковое направление, если m$\langle$ 0,то направления векторов противоположны.

Задачи:

1. Дано пр$_1 \vec{a}$= -2; пр$_1 \vec{b}$. Вычислить: 1) пр$_1(2\vec{a}+\vec{b})$; 2) пр$_1(3\vec{a}-2\vec{b})$.

Используя свойства проекций, получим:

1) пр$_1(2\vec{a}+\vec{b})$= 2пр$_1\vec{a}$+ пр$_1\vec{b}$ =2*(-2)+1= -3;

2) пр$_1(3\vec{a}-2\vec{b})$= 3пр$_1\vec{a}$-2пр$_1\vec{b}$ =3*(-2) – 2*1= -8

2. Дано: пр$_1\vec{a}$= -1, пр$_1\vec{b}$ = 3. Вычислить 1) пр$_1(\vec{a}-\vec{b})$;

2) пр$_1(\frac{1}{3}\vec{a}-\vec{b})$;

3. Постройте векторы; 1) $\vec{a}=(-2;4)$; 2) $\vec{b}$ =(3;2); 3) $\vec{a}=\vec{AB}$, если A(-1:-1), B(4;1);

4) $\vec{c}=\vec{CD}$, если с(0;2), D(4; 0).

4. Найдите координаты вектора: 1) $\vec{a}=\vec{AB}$, A(-2;-2), B(4;-1); 2) $\vec{b}$ =BC, B(1;-3), C(4; -5)

5. Даны векторы $\vec{a}$=(-2; -3), $\vec{b}$ =(5;0), $\vec{c}$=(3;-5) . Найдите координаты векторов: 1) $\vec{a}+\vec{b}$; 2) $\vec{a}+\vec{c}$; 3) $\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$; 4)2$\vec{a}$;5)3$\vec{a}-\vec{c}$; 6) $\vec{a}-2\vec{b}+2\vec{c}$.

6. Выразите через единичные векторы $\vec{i}$ и $\vec{j}$ векторы: 1) $\vec{a}$=(-2;-4) ; 2) $\vec{a}=\vec{AB}$; A(-1;2), B(--2;-6)

3.3. Векторы на плоскости

Основные понятия и определения

1.**Параллельный перенос.** Преобразование фигуры F на плоскости, при котором её произвольная точка с координатами (x,y) переходит в точку с координатами (x+a; y+b), где a и b- постоянные, называется *параллельным переносом*. Параллельный перенос задаётся формулами

$$x' = x + a, \quad y' = y + b, \qquad (1)$$

где (x’; y’) - координаты точки, в которую переходит точка (x;y) при параллельном переносе.

2.Понятие вектора. Отрезок называется *направленным*, если один из его концов считается началом отрезка, а другой - его концом.

Вектором называется направленный отрезок. Вектор, заданный парой (A, B) несовпадающих точек, обозначается символом $\vec{AB}$. Точка A называется *началом*, а точка B-*концом* вектора.

Расстояние $|\vec{AB}|$ называется *длиной (модулем)* вектора $\vec{AB}$.

Для обозначения векторов употребляются также строчные латинские буквы со стрелкой наверху: $\vec{a}$, $\vec{b}$ …, $\vec{x}$, $\vec{y}$.

Вектор $\vec{AA}$, концы которого совпадают, называется *нулевым вектором*. Длина нулевого вектора равна нулю. Понятие направления для нулевого вектора не вводится.

Каждый вектор, отличный от нулевого, вполне характеризуется своим направлением и длиной.

3.**Коллинеарные векторы.** Два вектора называются *коллинеарными,* если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых. Нулевой вектор считается коллинеарным любому вектору.

Если два нулевых вектора *a* и б коллинеарны, то они могут быть направлены либо одинаково, либо противоположно. В первом случае векторы а и б называются сонаправленными , во втором –противоположно направленными.

4.**Равенство векторов.** Два вектора называются равными, если они совмещаются параллельным переносом, т.е если существует параллельный перенос , который переводит начало и конец одного вектора соответственно в начало и конец другого вектора.

Другими словами, равные векторы сонаправленны и равны по модулю.

5.**Откладывание вектора от данной точки.** Из любой точки плоскости можно отложить единственный вектор, равный данному вектору. Построение вектора MN, равного вектору A ,называют откладыванием вектора A от точки M.

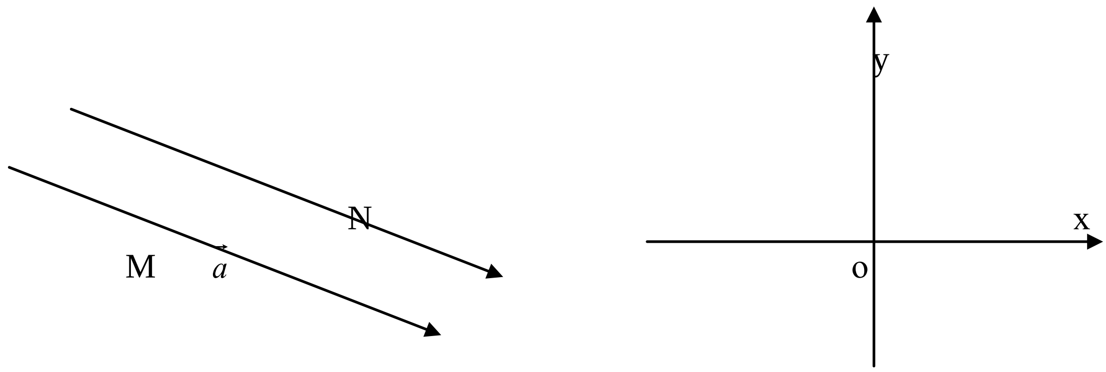


Рис. 1

Чтобы построить вектор $\overrightarrow{MN} = \vec{a}$ проведем из точки M луч, сонаправленный с вектором $\vec{a}$, и отложим на нем отрезок MN такой , что $MN = |\vec{a}|$. Тогда $\overrightarrow{MN} = \vec{a}$

1. Параллельный перенос переводит точку (2;3) в точку (-3;2). В какую точку он переведет точку (5;-2)?

Используя формулы (17,1), находим значения a и b, соответствующие параллельному переносу точки (2;3) в точку (-3;2)

$-3 = 2 + a,\quad 2 = 3 + b,$ т.е. $a = -5, b = -1$

Далее, по формулам (1) получаем $x' = 5 - 5 = 0$, $y' = -2 - 1 = -3$

Т.е. точка (5;-2) переходит в точку (0;-3) (рис. 1)

2. Параллельный перенос переводит точку (-4;1) в точку (2;-3). В какую точку он переведет (5;5)?
3. Параллельный перенос переводит начало координат в точку (-3;-5). В какую точку он переведет треугольник ABC с вершинами A(-2;6), B(4;8), C(5;3)?
4. Дан параллелограмм. Выполните параллельный перенос, который отображает точку пересечения его диагоналей в одну из его вершин.
5. Сколько векторов задают возможные упорядоченные пары точек, составленные из вершин: 1) треугольника; 2) параллелограмма?
6. Даны пары точек: 1) (-2;-3); (5;4); 2) (6;-2), (13;5); 3) (-8;-5), (-1;1). Укажите, какие пары определяют равные векторы.
7. Дан параллелограмм ABCD; O- точка пересечения его диагоналей. Какие пары, составленные из точек A, B, C, D и O, определяют один и тот же вектор?

Длина векторов. Расстояние между двумя точками на плоскости. Углы, образуемые вектором с осями координат.

Длина радиус-вектора $\vec{a} = (x; y)$ находится по формуле

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Длина векторов Длина векторов $\vec{a} = \overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A)$.находится по формуле

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_a)^2} \ldots (2)$$

Помощью этой формулы вычисляется также расстояние между двумя точками на плоскости.

Углы, образуемые вектором $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ с осями координат Ох и Оу, находятся по формулам

$$\cos\alpha = \frac{x_b - x_a}{\sqrt{(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2}}; \ \cos\beta = \frac{y_b - y_a}{\sqrt{(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2}}.$$

Найти длину вектора $\overrightarrow{AB}$, если А(1;1) и В(4;-3).

По формуле (2) находим $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(4-1)^2 + (-3-1)^2} = 5$

Даны точки А(4; 0), В(7; 4) и С(-4; 6). Найдите длины векторов: 1) $\overrightarrow{AB}$; 2) $\overrightarrow{BC}$; 3) $\overrightarrow{CA}$.

Вычислите периметр треугольника, вершинами которого служат точки: 1) А(4; 0), В(7;4) и С(-4; 6); 2) Ф\А(6; 7), В(3; 3) и С(1;-5).

Найдите косинусы углов образуемых заданными векторами с осями координат: 1) $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, А(-2;-3); В(3; 9); 2) $\vec{a} = \overrightarrow{BC}$, В(4;-1); С(0;2)

Найдите центр окружности, проходящей через точки А(-1; 9), В(-8; 2), С(9; 9), и длину ее радиуса.

1. Сложение векторов. Для того чтобы построить сумму двух данных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, нужно выбрать произвольную точку А и отложить от нее вектор $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, а затем от точи В вектор $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$. Тогда вектор $\overrightarrow{AC}$ является искомым суммой $\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} = a$

Вектор $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ называют замыкающим вектором, а векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ составляющими векторами. Этот способ построения называется правило треугольника.

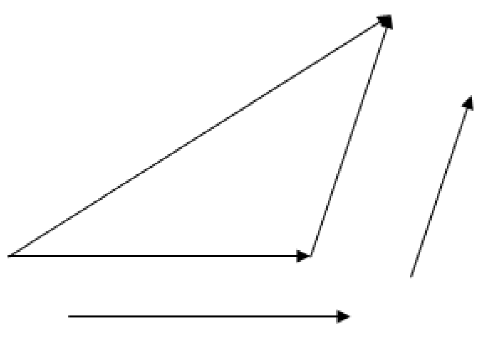


Рис.2

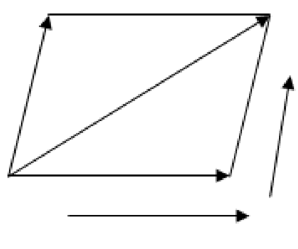


Рис.3

Правило треугольника можно сформулировать и так если А , В и С произвольные точки плоскости, то $\vec{AB}+\vec{BC}=\vec{AC}$.

Это равенство называют правило трех точек.

Сумму двух данных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ можно построить и следующим образом. Откладывая от произвольной точки О (рисунок 3) векторы $\vec{OA}=\vec{a}$ и $\vec{OB}=\vec{b}$, построим параллелограмм О АСВ. Тогда вектор $\vec{oc}$ (где [$\vec{oc}$] - диагональ параллелограмма) является искомой суммой : $\vec{a}+\vec{b}=OA+OB=\vec{OA}+\vec{AC}=\vec{OC}=c$. Этот способ построения называется правилом параллелограмма.

Для того чтобы построить сумму n данных векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2 ..., \vec{a}_n$, нужно от произвольной точки О отложить вектор $\vec{a}$, затем от конца вектора $\vec{a}_1$ отложить вектор $\vec{a}_2$,…, наконец, от конца вектора $\vec{a}_{n-1}$ отложить вектор $\vec{a}_n$. Тогда вектор, начало которого совпадает с началом вектора $\vec{a}_1$, а конец – с концом вектора $\vec{a}_n$, является искомой суммой : $\vec{c}=\vec{a}_1+\vec{a}_2+...+\vec{a}_n$ (Рис.100)

2. **Вычитание векторов.** Два вектора называются ***противоположным,*** если их сумма равна нулевому вектору. Вектор, противоположный вектору $\vec{a}$, обозначают -$\vec{a}$. Таким образом, $\vec{a}$+(-$\vec{a}$) = 0.

Нулевые противоположные векторы имеют равные длины и противоположные направления (рис. 4).

Вектор $\vec{c}$ называется *разность* векторов $\vec{a}.и.\vec{b}$, если $\vec{c}+\vec{b}=\vec{a}$.

Чтобы вычесть из вектора $\vec{a}$ вектор $\vec{b}$, достаточно прибавить к вектору $\vec{a}$ вектор, противоположный вектору $\vec{b}$, т.е. $\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$ (рис. 5).

Другой способ построения разности векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ состоит в следующем. Откладывая от произвольной точки О векторы $\vec{OA}$= $\vec{a}$ и $\vec{OC}$= -$\vec{b}$(вектор, противоположный вектору $\vec{b}$), получим $\vec{OB}$= $\vec{a}$-$\vec{b}$ (рис. 2).

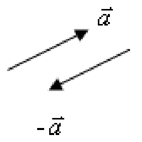


Рис. 4

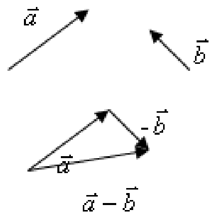


Рис. 5

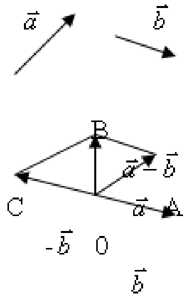


Рис. 6

3. **Умножение вектора на число.** *Произведением* нулевого вектора $\vec{a}$ на число m называется вектор, имеющий направление вектора $\vec{a}$, если m >0, и противоположное направление, если m<0. Длина этого вектора равна произведению длины вектора $\vec{a}$ на модуль числа m.

Произведению вектора $\vec{a}$ на число m обозначается m$\vec{a}$. При любых m и $\vec{a}$ векторы m$\vec{a}$ и $\vec{a}$ коллинеарны и | m$\vec{a}$| = |m| * |$\vec{a}$|.

4. **Угол между двумя векторами.** *Угол между двумя* ненулевыми векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется угол между направлениями этих векторов:

($\vec{a} \wedge \vec{b}$) = 180°

Частный случай : 1) если $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$, то ($\vec{a} \wedge \vec{b}$)=0 ; 2) если $\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{b}$, то ($\vec{a} \wedge \vec{b}$) =180°

Задачи:

1. Дано: $\vec{a}, \vec{b}$, ($\vec{a} \wedge \vec{b}$). Найти модуль вектора $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$

оПо теореме косинус имеем $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$. Так как $\cos C = \cos\ [180^{\circ}(\vec{a} \wedge \vec{b}] = -\cos\ (\vec{a} \wedge \vec{b})$, то

$C = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos(\vec{a} \wedge \vec{b})}$

2.По данным векторам $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ построить вектор $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$.

3. Найдите модуль равнодействующей двух сил $\vec{F_1}$ и $\vec{F_2}$, если если модули сил равны $F_1 = 8$Н и $F_2 = 5$Н а у угол между ними равен 30°

4. Точка *M*- середина стороны *AB* Треугольника *ABC*. Выразите $\overrightarrow{CM}$ через векторах $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$.

3.4. Умножение вектора на число. Коллинеарность векторов

Произведение вектора $\vec{a} \neq \vec{0}$ на действительное число λ называется вектор, длина которого равна произведению длины вектора $\vec{a}$ на модуль числа λ; направление же этого вектора совпадает с направлением вектора $\vec{a}$, если $\lambda > 0$, и противоположено направлению вектора $\vec{a}$, если $\lambda < 0$.

Произведение вектора $\vec{a}$ на число λ обозначают через $\lambda\vec{a}$, причем числовой множитель пишут, как правило, слева; длина вектора $\lambda\vec{a}$ по определению есть $|\lambda\vec{a}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$.

По определению полагают $\lambda \cdot \vec{0} = 0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$ для любого числа λ и любого вектора $\vec{a}$.

В этих обозначениях вектор - $\vec{a}$ выражается как произведение вектора $\vec{a}$ на число (-1), т.е. - $\vec{a}$=(-1) $\vec{a}$.

Укажем основные законы умножения вектора на число:

1^0. $\alpha(\beta\vec{a}) = (\alpha\beta)\vec{a}$ (сочетательный закон)

2^0. $(\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$ (распределительный закон относительного векторного множителя).

3^0. $\alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}$ (распределительный закон относительного числового множителя).

Два вектора, расположенные на параллельных прямых, называются коллинеарными (напомним, что совпадающие прямые также считаются параллельными).

Теорема 2 (признак коллинеарности двух векторов). Для того чтобы векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ были коллинеарны, необходимо и достаточно, чтобы существовало число λ такое, что $\vec{b} = \lambda\vec{a}$ или $\vec{a} = \lambda\vec{b}$.

3. По данному вектору $\vec{a}$ постройте вектор: а) $\frac{1}{3}\vec{a}$; б) $\sqrt{2}\vec{a}$; в) $-3\vec{a}$; г) $-\frac{1}{2}\vec{a}$.

4. По данным векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$ постройте векторы: а) $\frac{\vec{a} + \vec{b}}{2}$; б) $\frac{\vec{b} - \vec{a}}{2}$; в) $2\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$; г) $-\frac{1}{2}\vec{a} + \sqrt{3}\vec{b}$.

7. Упростите выражения:

а) $\frac{1}{3}\left(6\vec{a} - 9\vec{b}\right) + \frac{1}{2}\left(2\vec{a} - \vec{b}\right)$; б) $3\vec{a} - \vec{b} - 2\vec{a} + 3\vec{b}$;

в) $\sqrt{2}(\vec{a}-3\sqrt{2}\vec{b})-(\sqrt{2}\vec{a}-3\vec{b})$; г) $(2\vec{a}-\vec{b})-\frac{3}{2}(2\vec{a}+\vec{b})$.

3.5. Прямоугольные координаты. Действия над векторами в координатной форме

Система векторов $\{\vec{i}, \vec{j}\}$ образует базис на плоскости. Базис $\{\vec{i}, \vec{j}\}$ вместе с началом координат (точкой О) называется *декаративной прямоугольной системой координат* или просто *прямоугольной системой координат* на плоскости.

Ось координат, содержащая базисный вектор $\vec{i}$, называется осью абсцисс или осью Ох, другая ось координат нахывается осью ординат или осью Оу.

Прямоугольная система координат с началом в точке О и базисными векторами $\vec{i}$ и $\vec{j}$ означается Оху или $O\vec{i}\vec{j}$.

Как былор показано в предыдущем параграфе, всякий вектор $\vec{r}$ на плоскости однозначно раскладывается по векторам $\vec{i}$ и $\vec{j}$:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}.$$

Координаты x и y вектора $\vec{r}$ в этом разложении будем называть соответственно абсциссой и ординатой вектора $\vec{r}$.

Теорема. *Пусть в прямоугольной системе координат Оху векторы* $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ *заданы своими координатами т.е* $\vec{a}=(x_1;y_1)$, $\vec{b}=(x_2;y_2)$. *Тогда:*

1. Координаты суммы векторов $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ *получаются сложением одноименных координат этих векторов:*

$$\vec{a}+\vec{b}=(x_1+x_2;y_1+y_2).$$

2. Координаты разности векторов $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ *получаются вычитанием одноименных координат этих векторов:*

$$\vec{a}-\vec{b}=(x_1-x_2;y_1-y_2).$$

3. Координаты произведения вектора $\vec{a}$ *на число* λ *получается умножением координат этого вектора на* λ*:*

$$\lambda\vec{a}=(\lambda x_1;\lambda y_1).$$

Признак коллинеарности векторов дают еще одно необходимое и достаточное условие коллинеарности векторов: векторы $\vec{a}=(x_1;y_1)$, и $\vec{b}=(x_2;y_2)$ коллинеарны тогда и только тогда , когда их одноименные координаты пропорциональны :

$x_2 : x_1 = y_2 : y_1 = \lambda$ (при условии , что $x_1 \neq 0$ и $y_1 \neq 0$).

Используя определители, это условие можно записать в виде

$$\begin{vmatrix} x_1\, y_1 \\ x_2\, y_2 \end{vmatrix} = 0$$

Координаты вектора $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ *получаются вычитанием из координат его конца одноименных координат его начала.*

Действительно, так как $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}$, то $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$, откуда $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1)$.

Упражнения

1. Траектория движения материальной точки имеет вид ломаной, изображенной на рис.33 (A- начало ломаной, D- ее конец). Найти координаты точки в начале и конце движения, а также пройденный путь и перемещение.
2. В прямоугольной системе координат Oxy заданы векторы $\vec{a} = (2;-1)$ и $\vec{b} = (3;1)$. Найти координаты векторов $2\vec{a} - \vec{b}$ и $\vec{a} + 3\vec{b}$
3. В прямоугольной системе координат Oxy постройте точки A(5;1), B(-1;3), C(1/2; -$\sqrt{3}$), D(0; 1/3)
4. Даны векторы $\vec{a} = (2;-3)$ и $\vec{b} = (-8;2)$.Найдите координаты вектора $\vec{c}$, если а) $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$; б) $\vec{c} = 2\vec{a} - \vec{b}$, в) $\vec{c} = -\frac{1}{3}\vec{b}$, г) $\vec{c} = \frac{\vec{b} - \vec{a}}{2}$
5. Даны треугольник ABC: A(0;0), B(2;4), C(3;6). Найдите координаты векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{BA}$.

3.6. Деление отрезка в данном отношении.

Если отрезок AB разделён точкой C в отношении AC$\div CB = \lambda$ то координаты точки C находятся по формулам

$$x_{c|} = \frac{x_A + \lambda y_B}{1+\lambda}, y_c = \frac{y_A + \lambda y_B}{1+\lambda}.$$

Если $\lambda = 1$,то получаются формулы для нахождения координат середины отрезка :

$$x_C = \frac{x_A + x_B}{2}, y_c = \frac{y_A + y_B}{2}$$

Задачи:

№1. Отрезок, концы которого A(-11;1)и, B(9;11), разделён в отношении 2:3:5 (от A к B). Найти точку деления.

оОбозначим точки деления от A к B через C и D . По условию ,
$X_A = -11, X_B = 9, Y_A = 1, Y_B$ и AC:CD:DB=2:3:5. Точка C делит AB в отношение
$\lambda = -\frac{AC}{CB} = \frac{2}{3+5} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$; значит . $x_C = \frac{-11+(1/4)*9}{1+1/4}$=-7 , $y_C = \frac{1+(1/4)*11}{1+1/4} = 3$; C(-7;3).

Точка D служит серединой AB поэтому

$x_D = \frac{-11+9}{2} = -1; y_D = \frac{1+11}{2} = 6$; D(-1;6) •

2. Вычислите координаты точки C – середины отрезка если AB, если:

1)A(5;-4) и B(-1;2); 2) A(6;-3) и B(-2;-7).
3. Точка C делит отрезок AB в отношении 3:5 (от A к B). Концами отрезка служит точка A(2;3) и B(10;11). Найти точку C.
4. Отрезок, концами которого служат точки A(3;-2) и B(10;-9), делится точкой C в отношении 2:5. Найти точку C.
5. Отрезок, Концами которого служит точками A(-5;-2) и B(4;2,5), разделен в отношении 3:4:2 от A к B. Найдите точки деления.
6.Концом отрезка служит точка A(-3;-5) ,а его серединной – точка C (3;-2).Найди второй конец отрезка –точку B.
7.Найти точку пересечения медиан треугольника ,если вершинами его служат точки :1)A(7;-4),B(-1;8),C(-12;-1)
2)A(-4;2),B(2;6),C(0;-2)

3.7. Скалярное произведение двух векторов

Скалярным произведение двух ненулевых векторов называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними.

Скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначается символом $\vec{a}$ и $\vec{b}$

Таким образом, по определению. $\vec{a}*\vec{b}=|\vec{a}|*|\vec{b}|*\cos(\vec{a},\vec{b}).$

Скалярное произведение двух векторов равно модулю одного из них, умноженному на проекцию другого вектора по направлению первого: $\vec{a}*\vec{b}=|\vec{a}|np_{\vec{a}}\vec{b}=|\vec{b}|*np_{\vec{b}}\vec{a}.$

Скалярным квадратом вектора $\vec{a}$ называется скалярное произведение $\vec{a}*\vec{a}$.

Скалярный квадрат вектора равен квадрату его длины: $\vec{a}*\vec{a}=a^2$.

Необходимым и достаточным условием перпендикулярности двух ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ является равенство нулю их скалярного произведения: $(\vec{a}\neq 0,\vec{b}\neq 0,\vec{a}*\vec{\mathrm{b}}=0)\Leftrightarrow \vec{a}\perp \vec{\mathrm{b}}.$

Необходимое и достаточное условие коллинеарности двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ состоит в выполнении соотношения $\vec{a}\vec{b}=\pm|\vec{a}||\vec{b}|$

(при этом знак плюс соответствует случаю $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b},$ а знак минус- случаю $\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{b}$).

Скалярное произведение векторов $\vec{a}=(x_1y_1)$ и $\vec{b}(x_2y_2)$ выражается через их координаты по формуле $\vec{a}*\vec{\mathrm{b}}=x_1x_2+y_1y_2$ ….(1)

Угол между двумя векторами $\vec{a}=(x_1 y_1)$ и $\vec{b}(x_2 y_2)$ находятся по формуле $\cos(\vec{a},\wedge\vec{b})=\dfrac{x_1x_2+y_1y_2}{\sqrt{x_1^2+y^2{}_1}\sqrt{x_2^2+y_2^2}}$ …..(2)

Из этой формулы следует, что если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ перпендикулярны, то $x_1x_2+y_1y_2=0$.

Задачи:

1. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют угол $(\vec{a},\wedge\vec{b})=60^{o}$. Зная, что $|\vec{a}|=6,\ |\vec{b}|=3$,вычислить $(2\vec{a}+\vec{b})*(2\vec{a}-3\vec{b})$.

Используя формулы (1) и (2), получим (2a + b) • ($2\vec{a}$ - $3\vec{u}$) = $4\vec{a}^{2}$ - 6 $|\vec{a}|$ $|\vec{b}|$ • $\cos 60^{o}$ + 2 $|\vec{a}|$ $|\vec{b}|$ $\cos 60^{o}$ - $3\vec{b}^{2}$ = $4*6^2$ - 6*6*3*0,5+2*6*3*0,5-3*3^2 =81.

2. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют угол 150^{o}. Зная, что $|\vec{a}|=2, |\vec{b}|=3$, вычислите $(\vec{a}+\vec{b})*4\vec{a}$.

3. Найдите скалярное произведение векторов:

1) $\vec{a}=(2;4)$ и $\vec{b}=(4;1)$;

2) $\vec{c}=(1/2;\ \ 2/5)$ и $\vec{d}=(2/3;\ \ 5/6)$.

4. Даны точки $A(-2;4)$, $B(3;-6)$, $C(4;-2)$ и $D(1;5)$. Вычислите скалярное произведение $\overrightarrow{AB}*\overrightarrow{CD}$.

5. Вычислите угол между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$, если $A(3;1)$, $B(7;4)$, $C(3;2)$ и $D(6;6)$.

Общие уравнение прямой

Уравнение первой степени относительно переменных x и y , т.е уравнение вида .

Ax+By+c=0

При условии, что коэффициенты A и B одновременно не равный нулю, называют общим уравнение прямой.

Отметим частные случаи общего уравнения прямой.

Значение коэффициента	Вид уравнения	Положение прямой
C=0	Ax+By=0 (y+kx)	-Проходит через начало координат
A=0	By+C=0 (y=b)	-Параллельна оси Ox
B=0	Ax+C=0 (x=a)	-Oy
A=C=0	Y=0	-Совпадает с осью Ox
B=C=0	X=o	-Oy

Векторное уравнение прямой . Пусть i-прямая на плоскости xOy . M0(x0,y0)- точка на этой прямой , а n=(A;B) – ненулевой вектор , перпендикулярный прямой I (он называется нормальным вектором прямой). Если M(x,y) – произвольная точка на прямой I. Отличная от M0, то вектор M0M =r-r0=(x-x0;y-y0(перпендикулярен вектору n=(A;B) , т.е скалярное произведение этих векторов равна нулю:

N(r-r0)=0

Уравнение называется векторным уравнение прямой . Если ег переписать в координатой форме , то получится уравнение.

A(x-x0) + B(y-y0)=0

3. Каноническое уравнение прямой. Пусть M0(x0,y0) – заданная точка прямой , а q=(m,n)-вектор, коллинеарный прямой (он называется направляющим вектором прямой). Если M(x,y) – произвольная точка на прямой, то векторы M0M = (x-x0;y-y0) и q=(m;n) коллинеарные , т.е , координаты этих векторов пропорциональны

(x-x0)/m=(y-yo)/n

Называется каноническим уравнением прямой.

2.Построить прямую 3x+4y-12= 0

Для построения прямой найдем координаты точек пересечения с осями Ox и Oy . Пологая y=0 получим 3x-12=0 . x=4 A(4;0) . При x=0 получим 4y-12=0 ,y = 3 B(0;3) . Через точки A и проводим искомую прямую .

9.Постройте прямые 1) 2x-5y+10=0 2) 4x+6y-3=0

10.Постройте прямые 1)x=4 2) x=-3 3) y=2 4) y=-4

12. 1) Прямая , параллельная оси Ox, проходит через точку (3;4) . Составьте уравнение этой прямой

13) Длины сторон прямоугольника равны 3 и 4 . Составьте уравнения всех его сторон , если он расположен в III координатном угле так , что две из его сторон лежат на осях координат , причем меньшая из них лежит на оси Oy

2) Составьте уравнения сторон квадрата, если он расплоожен в I координатном угле и две из ео вершин имеют координаты A(2;0) и B(5;0)

3.9. Угол между двумя прямыми

Угол φ между двумя прямыми, заданными общими уравнениями $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$, вычислите по формуле

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} * \sqrt{A_2^2 + B_2^2}} \qquad (1)$$

Угол φ между двумя прямыми, заданными уравнениями с угловыми коэффициентами $y = k_1 x + b_1$ и $y = k_2 x + b_2$, вычислите по формуле

$$tg\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_2 k_1} \qquad (2)$$

Угол φ между двумя прямыми, заданными каноническими уравнениями $(x - x_1)/m_1 = (y - y_1)/n_1$ и $(x - x_2)/m_2 = (y - y_2)/n_2$, вычисляется по формуле

$$\cos\varphi = \frac{m_1 m_2 + n_1 n_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2} * \sqrt{m_2^2 + n_2^2}} \qquad (3)$$

1. Найти острый угол между прямыми $y = 5x$ и $y = 2x$

Угловые коэффициенты данных прямых равны 5 и 2. воспользуемся формулой (2), причем ее правую часть берем по модулю.

$$tg\varphi = \left|\frac{2-5}{1+2*5}\right| = \frac{3}{11} = 0{,}273; \quad \varphi \approx 15^{\circ}{,}3.$$

2. Найдите острый угол между прямыми: 1) $y = 3x$ и $y = -x$;
2) $2x - .y + 6 = 0$ и $3x - y - 3 = 0$; 3) $x/5 + y/2 = 1$ и $x/3 + y/4 = 1$;
4) $3x + 4y - 12 = 0$ и $15x - 8y - 45 = 0$.

3. Найдите острый угол между прямыми $(x-1)/5 = (y-4)/12$ и $(x+3)/3 = (y+2)/4$.

4. Найдите внутренние углы треугольника, если его стороны заданы уравнениями:
1) $7x + 4 + 9 = 0$, $x - 8y + 27 = 0$ и $2x - y - 6 = 0$;
2) $6x - y + 13 = 0$, $3x + 7y - 1 = 0$ и $3x - 8y - 31 = 0$;
3) $3x - 2y - 1 = 0$, $5x + 4y - 31 = 0$ и $x - 8y - 15 = 0$

Уравнение прямой, проходящей через данную точку A(Xa,Xy) в заданном направлении , имеет вид
Y=Ya=k(X-Xa)

Где k=tg a – угловой коэффициент прямой.

Уравнение можно рассматривать как уравнение пучка прямых , т.е. множества прямых , проходящих через одну и ту же точку плоскости – точку A(Xa,Ya). Заметит , что только одна прямая из всех проходящих через точку А, а именно прямая , перепникулярная оси Ох, не выражается уравнением вида . ЕЕ уравнение имеет вид X=Xa.

5. Составить уравнение прямой, проходящей через точку А(5;-1) и имеющей угловой коэффициент k=3

По условию Xa=5 , Ya=-1, k=3 . Подставляя эти значения в уравнение получим.
Y+1=3(x-5), или 3x-y-16=0

6. 1) Составьте уравнение прямой 1) проходящей через точку (-1 ;-1) и имеющей угловой коэффициент k=1 2) проходящей через точку (2:0) и имеющей угловой коэффициент k=-2

7. 1) Составьте уравнение прямой !) проходящей через точкук (4;-5) и образующей с осью Ох угол arctg (-3) 2) проходящей через точку (2;3) и образующей с осью Ох угол 45градусов. 3) проходящей через точку (0;5) и образующей с осью Ох угол 135 градусов.

3.10. Уравнение прямой, проходящей через две точки

Уравнение прямой, проходящей через две данные точки A(x_a;y_a) и B(x_B; y_B) имеет вид

$$y-y_A=\frac{y_B-y_A}{X_B-X_A}(x-x_A)$$

Угловой коэффициент прямой, проходящей через точки А и В , находится из соотношения

$$k_{AB}=\frac{y_B-y_A}{X_B-X_A}$$

1. Составить уравнение прямой, проходящей через точки А(2;-3) и В (-1;4).

- По условию , x_A=2, x_B=-1, y_A=-3 и y_B=4 . Подставив эти значения в уравнение (18.9),получим $y+3=\frac{4+3}{-1-2}(x-2)$,или $7x+3y-5=0$

2. Найти угол наклона к оси Ох прямой, проходящей через точки А(2;3) и В(-3;1).

- По условию, x_A=2, x_B=-3, y_A=3 и y_B=1. По формуле (18.10) находим $k=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{1-3}{-3-2}=0.4$, откуда $\alpha=arctg0.4=21^{\circ},8$.

3. Найти отрезки, отсекаемые на осях координат прямой, проходящей через точки А(6;2) и В(-3;8).

- Подставив в уравнение (18.9) координаты точек А(6;2) и В(-3;8) получим $y-2=\frac{8-2}{-3-6}(x-6)$. Приведем это уравнение к уравнению в отрезках на осях: $y-2=(-\frac{2}{3})(x-6)$, $y-2=(-\frac{2}{3})x+4$, $(\frac{2}{3})x+y=6$; $\frac{(\frac{2}{3})x}{6}+\frac{y}{6}=1$, $\frac{x}{9}+\frac{y}{6}=1$.

  Следовательно, a=9 и b=6.

4. Составьте уравнение прямой, проходящей через точки: 1) А(-1;-1) и В(-2;-2); 2) А(3;0) и В(0;4).

5. Составьте уравнения сторон треугольника, вершинами которого служат точки: 1) А(-3;-2), В(1;5) и С(8;-4); 2) (-1;-3), (3;5) и (4;0).

6. 1) Треугольник задан вершинами А(-3;4), В(-4;-3), С(8;1). Составьте уравнение медианы AD. 2) Треугольник задан вершинами А(2;5), В(-6;-4), С(6;-3).

7. Найдите угол наклона к оси Ох прямой, проходящей через точки А(-3;-3), В(2;1).

8. 1) Прямая проходит через точки А(-1;-6), В(7;2). Найдите отрезки, отсекаемые этой прямой на осях Ох и Оу.

3.11. Уравнение прямой в отрезках на осях

Уравнение прямой в отрезках на осях имеет вид $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$,

Где а и b- соответственно абсцисса и ордината точек пересечения прямой с осями Ох и Оу.

1. Построить прямую $\frac{x}{2}-\frac{y}{3}=1$

- Перепишем данное уравнение так: $\frac{x}{2}+\frac{Y}{-3}=1$, т.е. a=2 и b=-3. Таким образом, получаем точки А(2;0) и В(0;-3). Прямая , проведенная через точки А и В, является искомой

2. Постройте прямые: 1) $\frac{x}{2}+\frac{y}{6}=1$; 2) $\frac{x}{5}-\frac{y}{4}=1$; 3) $\frac{-x}{3}+\frac{y}{2}=1$; 4) $\frac{-x}{6}-\frac{y}{3}=1$.

3. Преобразуйте уравнения следующих прямых к уравнениям в отрезках на осях: 1) x+y-3=0; 2) 2x+3y+1=0; 3) 2x+3y-6=0; 4) 3x-4y+12=0.

4. Составьте уравнения прямой в отрезках на осях, если она пересекает оси координат в точках: 1) A(-2;0) и B(0;3); 2) A(3;0) и B(0;-4).

5. Найдите длины отрезков, заключенных между точками пересечения с осями координат, для следующих прямых: 1) $\frac{x}{6}+\frac{y}{8}=1$; 2) $\frac{x}{12}-\frac{y}{16}=1$; 3) $\frac{x}{9}-\frac{y}{12}=1$

3.12. Уравнение прямой с угловым коэффициентом

Уравнение прямой с угловым коэффициентом имеет вид y=Rx+b
где $R=tg\alpha$ -угловой коэффициент, равный тангенсу угла наклона прямой к оси Ох, а b-ордината точки пересечения прямой с осью Оу.

Если $\alpha=0, то R=0$, т.е. прямая параллельная оси Ох

При $\alpha=90^{\circ}$ углового коэффициента R не существует, т.е. прямая, перпендикулярная оси Ох, не имеет углового коэффициента.

Если на прямой, проходящей через начало координат, взята точка A(X_a; y_A), то
$R=tg\alpha=y_A/X_A$.

1.<u>Построить прямые:</u> y=3x; y=x; y=(1/2)x; y=-3x.

Продолжение прямой на плоскости определяется двумя точками, но для прямой, проходящей через начало координат, одна точка (начало координат) уже известна, поэтому достаточно из уравнения прямой найти еще одну точку и, соединив ее с началом координат, получить искомую прямую.

Построить прямую y=3x. Пологая x=1, находим y=3*1=3. Соединив точку A(1;3)с началом координат, получим искомую прямую.

Аналогично построим остальные прямые: y=x, B(1;1); y=(1/2)x, C (1;1/2); y=-3x, D (1;-3).

2.Постройте прямые:1)y=5x; 2)y=-(1/3)x; 3)y=4x+3; 4)y=-x+2.

3.Найдите углы наклона к оси Ох для прямых:1)y=($\sqrt{3}/3$)x; 2)y=-3x; 3)y=7x-8; 4)y=-2,9x+3; 5)3x+5y+20=0; 6)29x-10y+10=0

4.Составьте уравнения прямой, проходящей через начало координат, если ее угловой коэффициент:1)R=-1; 2)R=4.

5.Составьте уравнение прямой, если ее угловой коэффициент R=2/3, а b=-1/2.

3.13. Параметрические уравнения прямой

Пусть заданы координаты точек M_0, M и направляющего вектора $\vec{a}$ прямой $l: M_0(x_0;y_0;z_0), M(x;y;z), \vec{a}=(m;n;p)$. Тогда $\vec{r}-\vec{r_0}=\overrightarrow{M_0M}=(x-x_0;y-y_0;z-z_0)$ и параметрическое уравнение прямой L в векторной форме равносильно системе трех уравнений

$$\begin{cases} x=x_0+mt \\ y=y_0+nt \\ z=z_0+pt \end{cases}$$

Эти уравнения называются параметрическими уравнениями прямой в пространстве.

Направляющий вектор $\vec{a} = (m; n; p)$ прямой L отличен от нуля, поэтому по крайней мере одна из координат этого вектора также равна нулю.

Предположим сначала, что все три координаты вектора $\vec{a}$ отличны от нуля. Тогда параметрические уравнения прямой L можно записать в виде

$$\frac{x-x_0}{m} = t. \frac{y-y_0}{n} = t. \frac{z-z_0}{p} = t.$$

Исключив параметр t , получим систему неравенств

$$\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}$$

называемых каноническими уравнениями прямой в пространстве. Мы говорим «уравнения», так как здесь имеется два знака равенства и поэтому точнее было бы написать систему двух уравнений с тремя переменными x,y и z:

$$\begin{cases} \dfrac{x-x_0}{m} = \dfrac{y-y_0}{n}, \\ \dfrac{y-y_0}{n} = \dfrac{z-z_0}{p}. \end{cases}$$

Однако для удобства эти уравнения записываются в виде двойного равенства. Тогда в случае $x_2 \neq x_1, y_2 \neq y_1, z_2 \neq z_1$ получим следующие уравнения прямой L, называемые уравнениями прямой, проходящей через две данные точки:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}$$

Задания

1. Составьте канонические уравнения прямой, проходящей через точку M_0 параллельно вектору $\vec{a}$, если : а)

$M_0(2;5;-1), \vec{a} = (3;0,5;0); б) M_0(-3;0;6), \vec{a} = (-1;2;\frac{1}{3}); в) M_0(2,5;3;-2), \vec{a} = (0;0;1); г) M_0(1;4;0,5), \vec{a} = (-3;7;11).$

2. Составьте параметрические уравнения прямой, проходящей через точку M_0 параллельно вектору $\vec{a}$ если:

$а) M_0(-\frac{1}{3};-1;0), \vec{a} = (3;-1;4); б) M_0(3;-1;8), \vec{a} = (\sqrt{3};5;-2) в) M_0(7;\frac{1}{2};-5), \vec{a} = (0;3;0) г) M_0(1;-1;4), \vec{a} = (0;\sqrt{2};-\frac{1}{5}).$

3. Составьте уравнения прямой, проходящей через точки $M_1 и M_2$, если:

$а) M_1(3;0,5;1), M_2(1;0;-2). б) M_1(2;\frac{1}{3};\sqrt{5}), M_2(-\frac{1}{2};1;\sqrt{5}). в) M_1(-5;1;3), M_2(2;4;-1). г) M_1(4;-3;1), M_2(2;-3;1).$

Условие параллельности двух прямых, заданных общими уравнениями A1x+B1y+C1=0 и A2x+B2y+C2=0 , имеет вид A1/A2=B1/B2
Условие параллельности прямых, заданных уравнениями с уловыми коэффицентами y=k1x+b1 и y2=k2x+b2 имеет вид k2=k1
Условие параллельности двух прямых, заданных каноническими уравнениями (x-x1)/m1=(y-y1)/n1 и (x-x2)/m2=(y-y2)/n2 , имеет вид m1/m2=n1/2

1. Составить уравнение прямой, проходящей через точку M(-2;4) параллельно прямой 2x-3y+6=0

Записав уравнение данной прямой в виде y(2/3) x+2 , найдем ее угловой коэффицент k1=2/3 . Так как данная и искомая прямая параллельны , то их угловые коэффиценты равны , т.е. k2=k1=2/3 . Искомая прямая проходит через точку М (-2;4) и имеет угловой коэффициенты k2/3 . Поэтому ее уравнение записывается в виде

Y-4=2/3(x+2); или 2x-3y+16=0

2. Проверьте, параллельны ли следующие прямые 1) 2x-3y+4=0 и 10x-15y-7=0 2)25x+20y-8=0 и 5x+4y+4=0 3) y=-2+8 и y =-2x+1 4) y=3x+4 и y=-3x+2

3. При каком значении параметра a прямые (x-1)/2=(y+4)/5 и (x+6)/4 = (y-2)/a параллельны ?

4. Составьте уравнение прямой : 1) проходящей через точку A (-3;2) параллельно прямой 5x-3y+21=0 2) проходящей через точку A(-1:--4) параллельно прямой x/4+y/3=1

3.14. Условия перпендикулярности двух прямых

Условия перпендикулярности двух прямых, заданных общими уравнениями $A_1x+B_1y+C_1=0$и $A_2x+B_2y+C_2=0$, имеет вид

$A_1A_2+B_1B_2=0$

Условия перпендикулярности прямых, заданных уравнениями с угловым коэффициентами $y=k_1x+b_1$ и $y=kx_2+b_2$, имеет вид

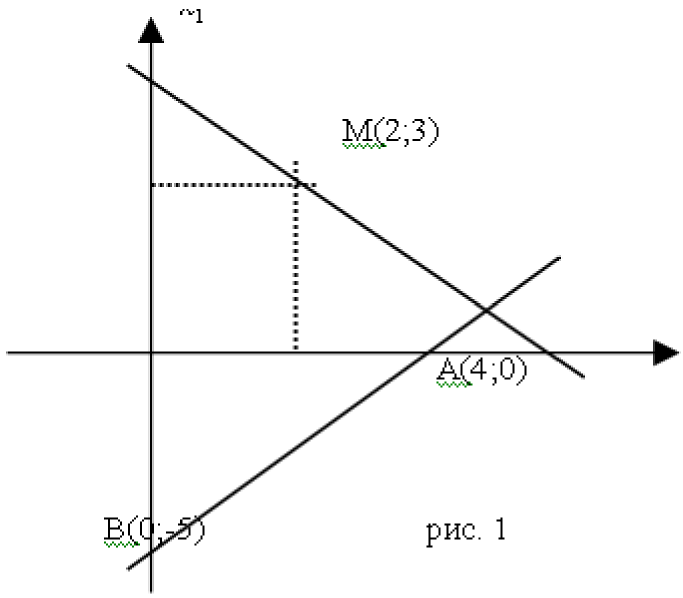


рис. 1

.

$k_2 = \frac{-1}{k_1}$ или $k_2k_1 = -1$

Условие перпендикулярности двух прямых, заданных каноническими уравнениями $\frac{x-x_1}{m_1} = \frac{y-y_1}{n_1}$ и $\frac{x-x_2}{m_2} = \frac{y-y_2}{n_2}$, имеет вид

$m_1m_2 + n_1n_2 = 0$

Расстояние d от точки $M(x_1;y_1)$ до прямой Ax+By+C=0 вычисляется по формуле

$d = \frac{|Ax_1 + Bx_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$.

1. Составить уравнение прямой, проходящей через точку M(2;3) перпендикулярно прямой 5x-4y-20=0 (рис. 1).

° Найдем угловой коэффициент данной прямой $k_1 = \frac{5}{4}$. когда угловой коэффициент искомой прямой $k_2 = -\frac{4}{5}$ и, следовательно, её уравнение имеет вид

$y-3=-\frac{4}{5}(x-2)$, или $4x+5y-23=0.$●

2. Проверьте, перпендикулярны ли прямые: 1) $3x-4y+12=0$ и $4x+3y-6=0$; 2) $4x+5y-8=0$ и $3x-2y+4=0$; 3) $\frac{x-x_1}{2}=\frac{y-y_1}{3}$ и $\frac{x-x_2}{3}=\frac{y-y_2}{-2}$ 4) $\frac{x-x_1}{5}=\frac{y-y_1}{-4}$ и $\frac{x-x_2}{4}=\frac{y-y_2}{5}$

3. При каком значении параметра k прямые $y=5x-4$ и $y=kx-2$ перпендикулярны?

4. Составьте уравнение прямой: 1) проходящей через точку М (4;-3) перпендикулярно прямой $5x-2y+10=0$; 2) проходящей через точку М (-4;1) перпендикулярно прямой $\frac{x}{5}-\frac{y}{6}=1$; 3)проходящей через начало координат перпендикулярно прямой $2x+3y-12=0$

3.15. Вектор нормали

Всякий ненулевой вектор, перпендикулярный данной плоскости, называется Нормальным вектором плоскости. Существует бесконечное множество нормальных векторов плоскости, и все они коллинеарны.

Координатами любой точки $M_0(x_0;y_0;z_0)$ плоскости α и ее нормального вектора n=(A; B; C) эта плоскость определяется однозначно , и, значит, можно составить ее уравнение.

Действительно, точка M (x; y; z) принадлежит плоскости α тогда и только тогда, когда векторы M_0M и $\vec{n}$ перпендикулярны, т.е. когда $M_0M\cdot\vec{n}=0$. Записав это равенство в координатной форме, окончательно получим

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

Это уравнение называется уравнением плоскости, проходящей через данную точку $M_0(x;\ y_0;\ z_0)$ перпендикулярно данному вектору $\vec{n}=(A;B;C)$.

Точка M(x; y; z) принадлежит указанной плоскости тогда и только тогда, когда ее координаты удовлетворяют полученному уравнению.

Коэффиценты A, B и C в уравнение плоскости α являются координатами ее нормального вектора $\vec{n}$ и поэтому одновременно не равны нулю.

Уравнение

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)$$

После раскрытия скобок и приведения подобных членов запишется в виде

$$Ax+By+Cz+D=0$$

(через $D=-Ax_0-By_0-Cz_0$ обозначен свободный член уравнения)

Это уравнение называется общим уравнением плоскости.

Если в общем уравнении плоскости отсутствует член с какой-либо переменной, то плоскость параллельна соответствующей оси координат.

Итак, если в общем уравнение плоскости два коэффициента при переменных равны нулю, то плоскость параллельна соответствующей координатой плоскости.

Пресечение двух прямых

Если даны две пересекающиеся прямые $A_1x+B_1y+C_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2=0$, то для вычисления координат точки пересечения данных прямых необходимо решить систему уравнений этих прямых.

1. найдите точку пересечения прямых 3x-4y+11=0, 4x-y-7=0.

○ Решив систему уравнений

$$\begin{cases} 3x - 4y + 11 = 0, \\ 4x - y - 7 = 0, \end{cases}$$

Получим x=3 и y=5. Следовательно, (3;5) – точка пересечения прямых.●

2. Найдите точку пересечения прямых:

1) y=3x и x+y+4; 2) x-2y-8=0 и x+y-2=0

3. Найдите вершины треугольника, если его стороны заданы уравнениями:

1) 4x+3y+20=0, 6x-7y-16=0, x-5y+5=0; 2)7x+3y-25=0, 2x-7y-15=0, 9x-4y+15=0

3.16. Многоугольники

1.Двуграный угол. Линейный угол двугранного угла

Как известно, угол в планиметрии определяется двумя лучами, исходящими из одной точки – вершины угла.

А какие ещё углы, кроме «планиметрических», встречаются в стереометрии? Простейшими из них является двугранный угол, который является пространственным аналогом угла на плоскости.

Двугранный угол называется фигура, образованная двумя полуплоскостями ,имеющими общую граничную прямую . Эти полуплоскости называются гранями, а их общая прямая- ребром двугранного угла .

Наглядное представление о двугранных углах дают окружающие нас предметы :раскрытая книга ,две пересекающиеся стены комнаты и т.д.

Двугранный угол обозначают в соответствии с обозначениями его граней и ребер.

Если пересечь двугранный угол плоскостью, перпендикулярно его ребру, то в сечении получится угол, который называется линейным углом двугранного угла.

Из определения линейного угла следует что, его стороны перпендикулярен ребру двугранного угла.

Можно показать, что всевозможные плоскости перпендикулярные ребру двугранного угла, дают в сечении равный линейный угол. Поэтому естественно измерять двугранный угол с помощью его линейного угла .

Величиной двугранного угла называется величина его линейного угла.

В зависимости от величины линейного угла двугранный угол называется острым, прямым или тупым .

Две произвольные пересекающиеся плоскости p и q образуют четыре двугранных угла (рис.1). Так как ребро двугранного угла перпендикулярно сторонам линейного угла, то величина наименьшего из указанных четырех двугранных углов совпадает с углом между плоскостями p и q.

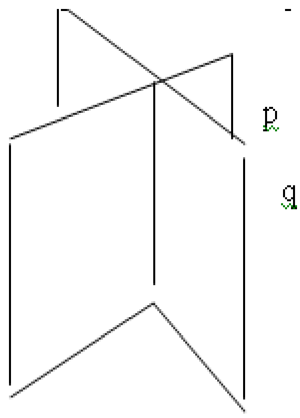
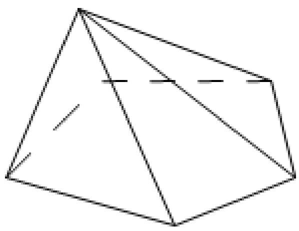


Рис. 1.

1. Конец двери шириной 1м при открывании описал дугу окружности длиной $\frac{\pi}{2}$ *м.* Найти величину двугранного угла, образованного открытой дверью и стеной.
2. Точка М, расположена внутри двугранного угла (то есть она является внутренней точкой некоторого отрезка с концами, принадлежащими граням этого угла), удалена от обеих граней на расстояние а. Найти расстояние от точки М до ребра двугранного угла, если его величина равна 60^0.
6. Концы отрезка АВ принадлежат разным граням двугранного угла. Длина отрезка АВ равна 10см, расстояние между основаниями перпендикуляров $AA_1 и BB_1$, проведенных из А и В к ребру L , есть $A_1B_1 = 8 см$. Найдите величину двугранного угла, если $AA_1 = 5 см, BB_1 = 6 см.$
8. Величина двугранного угла равна 45^0. На одной из граней взята точка, удаленная на расстояние 6см от плоскости другой грани. Найдите расстояние от этой точки до ребра двугранного угла.
9. Точка М расположена внутри прямого двугранного угла и удалена на расстояния 5 и 12 дм от его граней. Найдите расстояние от точки М до ребра двугранного угла.



Полученный многогранник с вершинами S, $A_1, A_1 \ldots A_n$ называется пирамидой.

Точка S называется вершиной, а многоугольник $A_1, A_1 \ldots A_n$ вместе с его внутренней областью – основанием пирамиды.

Таким образом, пирамида- это ограниченная часть многогранного угла, отсекаемая плоскостью, не проходящей через его вершину.

Треугольная пирамида имеет ещё и другие название – тетраэдр.

Пирамида называется правильной, если её основание – правильный многоугольник а основание высоты совпадает с его центром.

Высота боковой грани правильной пирамиды, опущенная из вершины пирамиды, называется апофемой пирамиды.

Сечением многогранника К плоскостью α называется общая часть (пересечения) многогранника и плоскости.

Теорема (о параллельных сечениях пирамиды). Плоскость, параллельная основанию пирамиды, отсекает от нее подобную ей пирамиду, т. е., в частности

А) основания пирамид подобные многоугольники;

Б) боковые ребра и высоты пирамид пропорциональны;

В) площади оснований пирамид относятся как квадраты высот пирамид.

Нижний же многогранник называется усеченной пирамидой.

Упражнение

1. Гробница фараона помещена в центре сечения правильной четырехугольной пирамиды плоскостью, проведенной параллельно основанию пирамиды на расстоянии h от земли. Длина бокового ребра пирамиды равна I, а длина стороны основания равна a. Найти расстояние от гробницы до вершины пирамиды.

Δ Обозначим гробницу точкой M (размерами гробницы пренебрегаем), лежащей на высоте SO пирамиды SABCD(рис. 216). По условию, MO=h.

Найдем длину высоты SO. Очевидно, SO= $\sqrt{SA^2} - AO^2 = \sqrt{I^2} - AO^2$. Но ABCD-квадрат со стороной a и, следовательно, AO= $\frac{AC}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Таким образом, SO= $\sqrt{i^2} - \frac{a^2}{2}$.

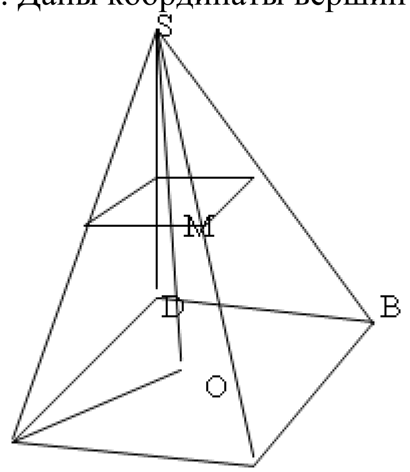
Отсюда окончательно находим

$$SM=SO-MO=\sqrt{l^2} - \frac{a^2}{2} - h.$$

6. Постройте: а) пирамиду, все боковые грани которой- прямоугольные треугольники; б) пирамиду, две противоположные грани которой перпендикулярны плоскости основания; в) пирамиду, около нельзя описать сферу; г) две различные пирамиды, все ребра которых равны.

10. Длины сторон основания правильной четырехугольной усеченной пирамиды равны 10 и 2 см, длина бокового ребра равна 9см. Найдите: а) высоту этой усеченной пирамиды; б) площадь сечения, проходящего через середины ребер данной усеченной пирамиды; в) площадь диагонального сечения.

12. Даны координаты вершин пирамиды



3.17. Призма. Прямая и параллельная призмы. Параллелепипед.

Призма- некоторый многогранник с основаниями $A_1A_2....A_n$ и $A_1'A_2'....A_n'$

Основания призмы- равные многоугольники, лежащие в параллельных плоскостях, а боковые грани- параллелограммы.

Если боковые ребра призмы перпендикулярны основаниям, то призма называется *прямой,* а в противном случае- *наклонной*.

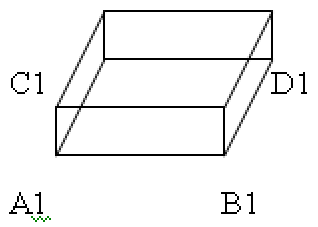
Прямая призма, в основании которой лежит правильный многоугольник, называется правильной.

Перпендикуляр, опущенный из любой точки верхнего основания на плоскость нижнего основания, называется высотой призмы.

Диагональю призмы называется любой отрезок, соединяющий две не лежащие в одной грани вершины призмы.

Легко видеть, что диагональная плоскость призмы проходит через два боковых ребра призмы, не лежащие в одной грани.

Параллелепипедом называется призма, в основании которой лежит параллелограмм.



1^0. Параллелепипед имеет центр симметрии, который делит любую диагональ пополам.
2^0.Противоположные грани параллелепипеда равны и лежат в параллельных плоскостях.
Применяем теорему Пифагора, нетрудно доказать, что квадрат длины любой диагонали прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов трёх его измерений.

Упражнения

1. Кубик с ребром 3 дм покрасили. Сколько краски израсходовано, если для покраски 1 дм^2 требуется 1 кг краски?

Δ Очевидно, что задача сводится к вычислению площади поверхности кубика, т.е. к нахождению суммы площадей всех его граней. Но все шесть граней кубика- равные квадраты с площадью $3^2 = 9\left(\partial м^2\right)$. Следовательно, суммарная площадь S=6*9=54$\left(\partial м^2\right)$ и, значит, необходимо израсходовать 54 г краски.

8. Площадь основания правильной прямоугольной призмы равна $32\sqrt{3} см^2$, а высота призмы равна 6 см. Найдите длину диагонали боковой грани призмы.

9. Сумма площадей всех боковых граней призмы называется площадью боковой поверхности призмы. Докажите, что площадь боковой поверхности прямой призмы равна произведению периметра основания на длину бокового ребра.

12. Найдите длины диагоналей и площади диагональных сечений прямоугольного параллелепипеда, если его измерения равны 3, 4 и 12 см.

13. Две соседние вершины куба имеют координаты А(0; 1; 1) и В(1;1;1). Составьте уравнение диагональной плоскости, проходящей через вершины А и В, если точка О(1/2;1/2;1/2)- центр куба.

14. Найдите расстояние от вершины куба с ребром *а* до его диагоналей.

3.18. Конус, усеченный конус. Сечения конуса плоскостями

Пусть через центр O круга K на плоскости а проведен перпендикуляр OP к этой плоскости (рис.2). Соединим произвольную точку M круга K отрезком MP с точкой P. Всевозможные отрезки PM, когда M пробегает весь круг K, заполняют некоторое тело, которое называется конусом (иногда говорят прямым Круговым конусом). Круг K называется основанием конуса, а точка P- вершиной конуса. Отрезки, соединяющие вершину конуса с точками Окружности его основания (например, отрезок SP на рис.2), называются образующими конуса. Все образующие конуса равны между собой, так как равны их проекции на плоскость основания конуса. Точки всех образующих конуса заполняют часть поверхности конуса, называемую боковой поверхностью Конуса.

Отрезок, соединяющий вершину конуса с центром его основания (отрезок OP на рис.2), называется высотой конуса. Длину этого отрезка, т.е расстояние от вершины конуса до плоскости его основания, будем также называть высотой конуса.

Прямая, проходящая через вершину конуса и центр его основания, называется осью конуса. Ось конуса содержит, очевидно , его высоту и перпендикулярна плоскости основания конуса.

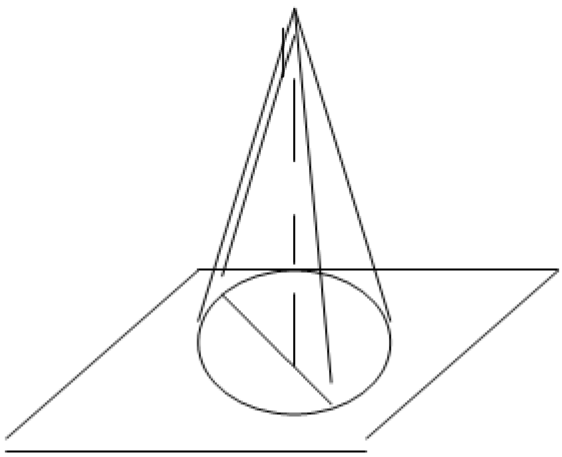


Рис.2

Сечение конуса плоскостью, проходящей через его ось, называется осевым сечением (на рис. 2) осевое сечение заштриховано).

Осевое сечение конуса представляет собой равнобедренный треугольник, боковыми сторонами которого являются образующие конуса, а основанием-диаметр основания конуса.

Плоскость, проходящая через образующую конуса перпендикулярно осевому сечению, содержащему эту образующие конуса, а основание –диаметр основания конуса.

Можно доказать следующее утверждение: сечение Конуса плоскостью, перпендикулярной его оси , представляет собой Круг с центром на оси конуса. Усеченный конус- это часть конуса , заключенная между его основанием и плоскостью, перпендикулярной оси конуса и пересекающей его.

Упражнения

1. Необходимо изготовить проволочную модель конуса с шестью образующими , в осевом сечении которого равносторонний треугольник со стороной 10 см . Сколько проволоки потребуется для Изготовления модели ?

Искомая длина L проволоки складывается из суммарной длины Шести образующих и длины окружности основания диаметра 10 си.
Таким образом, L=$6\cdot10+\pi\cdot10\approx91,5$(см.)

4. образующая конуса равна 10см, а высота конуса равна 5 см. Найдите: а) радиус основание конуса; б) угол, который составляет образующая с плоскостью основания; в) площадь Осевого сечения конуса.

6. Постройте: а) касательную плоскость к конусу, проходящую через данную точку (исследуйте различные случи), б) сечение данного конуса плоскостью, проходящей через вершину так чтобы угол при вершине полученного треугольника был равен 30°(исследуйте возможность построения).
в) конус, если заданный его вершина, плоскость основания и площадь S осевого сечения;
г)* конус, если даны три касательные к нему плоскости и плоскость его основания.
7.Радиусы оснований усеченного конуса равны 10 и 6.
Найдите: а) длину образующей усеченного конуса, если его высота равна 3; б) площадь осевого сечения усеченного конуса, если длина образующей равна 5; в) площадь сечения усеченного конуса, приведенного через середину высоты параллельно основаниям; г) высоту усеченного конуса, если его образующая составляет угол 60° с плоскостью
нижнего основания.
8.Докажите, что сечении усеченного конуса любой плоскостью, параллельной его оси и пересекающей оба его основания, получается равнобедренная трапеция.
9. Изобразите развертку усеченного конуса.
10.Лист тонкой жести имеет форму кругового сектора с радиусов 18 см и центральным углом 120°. Найдите высоту воронки, которую можно свернуть из этого листа.
11.Вершина треугольника в осевом сечении конуса заданы координатами; А (0;0;10), В ($3\sqrt{2}$; $3\sqrt{2}$; 6), С ($-3\sqrt{2}$; $-3\sqrt{2}$; 6). Найдите: а) уравнение плоскости основания конуса;
б) уравнение оси конуса;

3.19. Сфера

И так, сфера радиуса R с центром в данной точке O называется множеством всех точек пространства, удаленных от точек O на расстоянии R. Точка O называется центром сферы, а число R – её радиусом.

Радиусом сферы будем называть также отрезок, соединяющий произвольную точку сферы с её центром (например отрезок O M). Любой отрезок с концами на сфере и серединой в её центре называются ДИАМЕТРОМ сферы. Ясно что длины всех диаметров сферы равны 2R. Это число также будем называть диаметром серы.

Таким образом, сфера является пространственным аналогам окружности. Этим объяснением сходство некоторых свойств сферы и окружности. Так, уравнение окружности радикса R на плоскости с центром в начале координат имеет вид $x^2+y^2=R^2$

Аналогично получается уравнение сферы радиуса R с центром в начале координат (добавляется только третья координата z в квадрате)

$$x^2+y^2+z^2=R^2$$

Действительно, точками указанной сфере является те и только те точки M (x: y: z), расстояние которых до начала координат равно R, т.е. $\sqrt{x^2+y^2+z^2=R}$

Возле этого равенства в квадрат, получим требуемое уравнение.

Если же в центре сферы радиуса R перенесён из начала координат в точку O то её уравнение примет

$$(x-x_0)^2+(y+y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$$

Шаром радиуса R с центром всех точек пространства, расстояние от каждой из которых до точки O меньше или равно R

Из определения следует, что точка M (x ;y ;z) принадлежит шары радиусу R с центром в точке O $(x_0;y_0;z_0)$ тогда и только тогда, когда $O'M \le R$ или в координатной форме

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2 \le R^2.$$

Поверхностью шара радиуса R с центром в точке O называется ограничивающая его сфера с тем же радиусом и тем же центром.

Центр и диаметр ограничивающей шар сферы называются центром и диаметром этого шара.

Рассмотрим теперь сечения шара и сферы различными плоскостями.

Вопрос о сечениях шара плоскостями полностью описывается следующей теоремой.

Теорема 1. Всякое сечение шара плоскостью есть круг. Отрезок, соединяющий центры круга и шара, перпендикулярен плоскости круга.

1) сечение сферы плоскостью есть окружность;
2) сечение сферы, равноудалённые от центра, равны.

Из формулы $r=\sqrt{R^2-OO^2}$ для радиуса круга, полученного в сечении шара плоскостью, видно, что в том случае, когда $OO'=0$, т.е. когда секущая плоскость проходит через центр шара (такая плоскость называется диаметральной), в сечении получается круг наибольшего радиуса R.

Сечение шара диаметральными плоскостями называются большими кругами.

Теорема 2. Плоскость, проходящая через конец радиуса сферы перпендикулярно этому радиусу, является касательной плоскостью сфере.

Упражнения

1. Найти площадь сечения шара радиуса R плоскостью, находящейся на расстоянии d $(0\langle d\langle R)$ от центра шара.

Найдём радиус круга, полученного в сечении: r $=\sqrt{R^2-d^2}$.Следовательно, площадь сечения есть $S=\pi r^2=\pi(R^2-d^2)$.

4. Составьте уравнение сферы, если известны: а) центр O (2;3;5) и радиус R=4; б) центр O (-1;0;-3) и радиус R=1.

7. Пункты A и B находятся на одной и ой же параллели, широта которой равна 60^0. Радиус земли R=6370 км ≈ 6400км. Найдите: а) длину параллели; б) расстояние между A и B по параллели, если разность их долгот равна 120^0.

9. Найдите радиус шара: а) вписанного в куб с ребром a; б) вписанного в правильный тетраэдр с ребром a; в) описанного около куба с ребром a; г) описанного около правильного тетраэдра с ребром a.

14. Составьте уравнение сферы: а) проходящей через точки (0;0;0), (0;0;-2), (0;1;-1), (1;0;-1); б) проходящей через точки (2;2;0), (2;0;2), (4;0;0) и имеющей радиус

3.20. Цилиндр. Сечение Цилиндра Плоскостью

В этой главе мы начинаем изучение так называемых круглых тел. Как мы увидим, все такие тела могут быть получены вращением некоторой линии вокруг оси. Одним из наиболее известных круглых тел является цилиндр.

Пусть заданы некоторый круг К в плоскости α и вектор перпендикулярный этой плоскости (рис. $\frac{221,a}{MM}$) . От каждой точки М круга К отложим вектор равный вектора а.

Точки всех таких отрезков ММ, заполняют некоторое выпуклое тело, называемое цилиндром (рис.2)

Концы и начала всевозможных векторов заполняют два равных круга К и К, лежащих в параллельных плоскостях. Круги К и К называются основаниями цилиндра.

Длина вектора а, т.е. расстояние между плоскостями оснований цилиндра, называется высотой цилиндра.

Боковой поверхностью цилиндра называется фигура, заполненная точками всех отрезков ММ′ (ММ ′=а), отложенных от точек окружности, ограничивающей круг К.

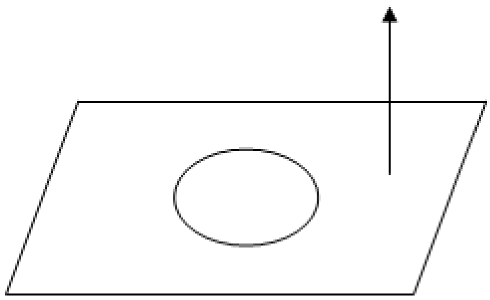


Рис.1

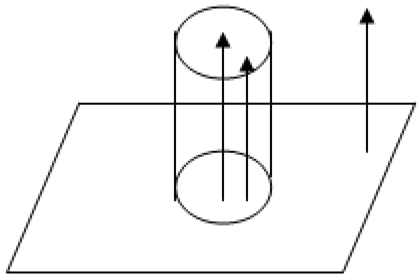


Рис.2

Любой отрезок АА′такой, что точка А лежит на границе круга К (нижнего основания цилиндра) и АА= а (рис. 2), называется образующей цилиндра.

Из определения непосредственного вытекает, что все образующие цилиндра равны между собой; их длина равна высоте цилиндра.

Прямая, проходящая через центр круга К, лежащего в основании цилиндра, и параллельная вектору а (т.е. перпендикулярная плоскости α основания цилиндра), называется осью цилиндра.

Плоскостью, на которую можно положить цилиндр, т.е. плоскость, проходящая через образующую цилиндра перпендикулярно осевому сечению, содержащему эту образующую, называется касательной плоскостью к цилиндру.

Упражнения

1.На пять одинаковых бревен цилиндрической формы, лежащих на земле и касающихся друг друга, положена доска, концы которой опираются на крайние бревна. Найти длину доски, если расстояние от доски до земли равно 0,5 м.

ΔЯсно, что расстояние от доски до земли (т.е. расстояние от плоскости земли) равно диаметру бревна d=0,5 м. Длина же доски l равна расстоянию между центрами оснований крайних бревен, т.е. 4d (убедитесь в этом, выполнив рисунок). Таким образом, l=4d=2 (м).

4. Высота цилиндра равна 10см, а радиус основания 1см.

Найдите: а) площадь осевого сечения; б) площадь сечения цилиндра плоскостью, отстоящей от оси цилиндра на расстояние ½ см.

6. Постройте: а) цилиндр, если заданы его высота и длина стороны правильного треугольника, вписанного в основание цилиндра; б) правильную шестиугольную призму, вписанную в данный цилиндр (см. упр.3); в) *плоскость, касательную к данному цилиндру и проходящую через данную точку, находящуюся вне цилиндра между плоскостями его оснований.
7. в осевом сечении цилиндра получился квадрат площадью 4 см^2. Найдите: а) площадь основания цилиндра; б) площадь боковой поверхности цилиндра (т.е. площадь развертки боковой поверхности).
15. Ширина асфальтового катка равна 2м, а его диаметр равен 1м. какую площадь выравнивает каток за один оборот?
16. высота деревянной чурки 20см, а диаметр основания 10см. Каковы максимальные размеры (т.е. полуоси) эллипса, который можно получить при распиле чурки?

3.21. Объем прямоугольного и наклонного параллелепипеда

Объем куба с ребром, равным 1/n единиц длины, равен $1/n^3$ единиц объема (n-произвольное натуральное число)

Теорема.1

Объем прямоугольного параллелепипеда равен произведению трех его измерений

V=abc,

Где a, b и c – измерения параллелепипеда.

Замечание. Произведение ad есть площадь S основания параллелепипеда, а длина ребра c – его высоты. Таким образом, теорему можно сформулировать по другому: объем прямоугольного параллелепипеда равен произведению площади его основания на высоту, т.е.

V=SH.

Теорема.2

Объем любого параллелепипеда равен произведению площади его основания на высоту, т.е.

V=SH.

где S-площадь основания параллелепипеда, а H-его высота.

Пример

*1.*Чугунный брус массой 14,6 кг имеет форму прямоугольного параллелепипеда размерами 5x4x100 см. Найти плотность чугуна.

Объём бруса составляет V=5*4*100=2000(см^3). Теперь найдём плотность: p=$\frac{m}{V}=\frac{14600}{2000}7.3$ (г/см^3).

2. Диагональ куба равна $4\sqrt{3}м$. Найти объем куба.

Обозначим ребром куба через а. Тогда для его диагонали имеем уравнение $4\sqrt{3}=\sqrt{a^2+a^2+a^2}=a\sqrt{3}$, откуда а=4м.

Теперь находим объем куба: $V=a^3=64(m^3)$.

Задачи:

3.С чугунной плитки шириной 100мм и длиной 120мм снят слой в 2мм толщиной. Найдите объем снятого металла.

4.Медный куб с ребром 3 дм переплавлен в три одинаковых куба .Найти ребро малого куба.

5.Найти объем параллелепипеда, если: а) параллелепипед прямоугольный и в него вписан шар диаметром d; б) он вписан в цилиндр с радиусом окружности r, угол между диагоналями оснований параллелепипеда равен $30°$, диагональ параллелепипеда равна L.

6.Все грани наклонного параллелепипеда – равны ромбу с диагоналями 6 и 8см. Найдите объем параллелепипеда.

3.22. Объем пирамиды и конуса

Формула для вычисления объема тела через площади его поперечных сечений позволяет находить объемы многих тел. Применим ее для вычисления объема пирамиды.

Теорема 6. *Объем пирамиды равен 1/3 произведения площади ее основания на высоту, т.е*

$$V=\frac{1}{3}SH,$$

где S-*площадь основания пирамиды* ,а Н-ее высота.

Теорема 7. *Объем конуса равен 1/3 произведения площади его основания на высоту, т.е.*

$$V=\frac{1}{3}SH,$$

где S-площадь основания конуса, а Н-его высота.

Упражнения

1. Из чугунной заготовки (плотность чугуна р=7,2 г/см^3) массой m=1440 г отлит конус высотой Н=30 см. Найти радиус r основания конуса.

Δ Объем полученного конуса составляет

$$V=\frac{m}{\rho}=\frac{1440}{7,2}=200\ (\text{см}^3).$$

С другой стороны, объект конуса есть

$$V=\frac{1}{3}\pi r^2 H=10\pi r^2.$$

Отсюда

$$r=\sqrt{\frac{V}{10\pi}}=\sqrt{\frac{20}{\pi}}=\sqrt{6,4\approx 2,5}\ (\text{см}).$$

2. Найти объем треугольной пирамиды, если все плоские углы при вершине пирамиды-прямые и боковые ребра равны *a,b,c.*

3.Найдите объем правильной треугольной пирамиды, если: а) высота пирамиды равна h, а двугранный угол при боковом ребре равен α; б) расстояние от центра основания до боковой грани равно m, а плоский угол при вершине пирамиды равен β.

4.Найдите объем усеченного конуса, если а) радиусы его оснований R= 3 см, r=2 см, а образующая наклонена к плоскости основания под углом $45°$; б) он образован вращением равнобедренной трапеции с основаниями 5 и 3 вокруг отрезка длиной 1, соединяющего середины оснований трапеции.

5. Найдите объем пирамиды, вершины которой находятся в точках A_1(3;5;1), A_2(7;-1;13), A_3(-1;1;8), A_4(1;2;7).

3.23. Объем призмы

Теорема 3:*Щбъем произвольной призмы равен произведению площади ее основания на высоту, т. е.* $V=SH$.

Таким образом, *объем любой призмы равен произведению площади ее перпендикулярного сечения на длину бокового ребра:*

$$V=S_{сеч}l.$$

1.Перпендикулярное сечение канала глубиной 5 м имеет формулу трапеции с основаниями 8 и 20 м. (рис. 260). Какое количество воды вмещает участок канала длиной 1 км?

Нужно найти объем четырехугольной призмы с боковым ребром 1 км. Как было установлено, объем такой призмы равен произведению площади ее перпендикулярного сечения на длину ребра: $V=S_{сеч}l$. В данном случае $l=1000$ *м, а* $S_{сеч}$ равно площади трапеции с основаниями $a=8$ м и $b=20$ м и высотой $h=5$ м (глубина канала), т. е.

$$S_{сеч}=\frac{a+b}{2}h=\frac{(8+20)}{2}*5=70\ (м^2).$$

Отсюда окончательно находим

$V=S_{сеч}l=70*1000=70000$ (м^2).

2.Основание призмы –прямоугольный треугольник с катетами 3 и 4. Боковое ребро имеет длину $l=8$ и наклонено к плоскости основания поз углом 30º.Найти объем призмы.

Площадь основания призмы есть $S=\frac{1}{2}*3*4=6$ (кв.ед.).

Высота призмы составляет $H=l\sin 30^\circ=4$. Отсюда для объема призмы имеем

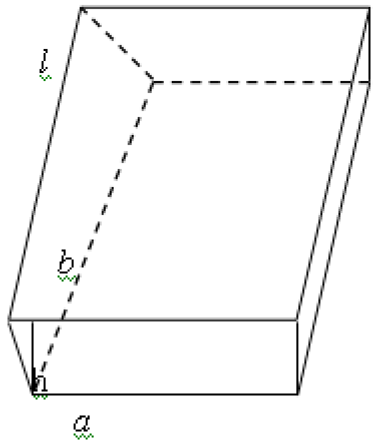
$V=SH=6*4=24$ (куб.ед.).

3.В правильной треугольной призме все ребра равны 5 см. Найдите: а) объем призмы; б) площадь сечения , проходящего через ребро основания под углом 60º к основанию.

4.Найдите объем прямой призмы если,: а) высота призмы $H=2$ м, а в основании призмы лежит ромб $ABCD$, у которого $\angle A=30^\circ$ и высота равна 4 м;

5.Боковое ребро наклонной треугольной призмы имеет длину $5\sqrt{5}$ см. Расстояния между боковыми ребрами равны 7, 8 и 9 см. Найдите объем призмы.

6.Нйдите объем треугольной призмы, построенной на векторах $\vec{a}=(3;6;3)$; $\vec{b}=(1;3;-2)$ и $\vec{c}=(2;2;2)$.

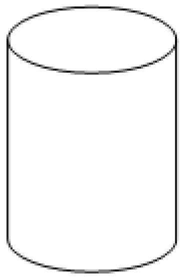


3.24. Объем цилиндра. Площадь сферы

Теорема 4. Объем цилиндра равен произведению площади его основания на высоту, т.е .

V=SH,

Где S= πr^2 - площадь основания цилиндра, а H – его высота.



Упражнения

1. В банку, диаметр основания которой 18 см, опущен камень, вследствие чего уровень воды в банке поднялся на 12,5 см. Найти объем камня.

Согласно закону Архимеда, камень вытесняет столько воды , сколько ее помещается в объеме камня. Но объем вытесненной воды равен объему цилиндрического столбика воды высотой h=12,5 см и радиусом основания r = 18/2 см =9 см. Следовательно , объем камня

$V = \pi r^2 h = \pi \cdot 9^2 \cdot 12{,}5 \approx 32000(см^3) = 3{,}2 дм^3$

2. Найти отношение объема произвольного цилиндра к объему вписанной в него правильной четырехугольной призмы.

Обозначим сторону квадрата в основании призмы через a, высоту призмы – через H. Тогда объем призмы составит $V_п = a^2 H$. Радиус основания описанного цилиндра равен половине диагонали квадрата в основании призмы: $r = 0{,}5a\sqrt{2}$. Таким образом, объем цилиндра $V_ц = \pi r^2 H = 0{,}5\pi a^2 H$

Теперь найдем отношение объемов:

$\frac{V_ц}{V_п} \frac{0{,}5\pi a^2 H}{a^2 H} \frac{\pi}{2}$.

3. Проволока длинной 1 км и диаметром 4 мм имеет массу 98 кг 596 г. Найдите плотность металла, из которого изготовлена проволока.

4. Найдите объем цилиндра, если :а) расстояния от центра цилиндра до его основания и до образующей соответственно равны a и b; б) расстояние от оси цилиндра до касательной плоскости равно m, а угол между диагональю осевого сечения и осью цилиндра равен φ; в) известны площади S и Q ортогональных проекций цилиндра на две взаимно перпендикулярные плоскости, первая из которых параллельна плоскости основания цилиндра.

3.25. Объём шара. Объём тела вращения.Площадь сферы

Теорема 1. Объём шара радиуса R находится по формуле

$$V=\frac{4}{3}\pi R^3$$

Теорема 2. Площадь сферы радиуса R находится по формуле

$$S=4\pi R^2$$

Упражнения.

1. Футбольный мяч помещен в кубическую коробку с ребром а = 20 см так, что касается всех её стенок. Найти объём меча.

Очевидно, что диаметр мяча равен ребру куба, откуда R= а/2 = 10 (см).

Теперь находим объём мяча: $V=\frac{4}{3}\pi R^3 \approx 4(дм^3)$

2. В цилиндрический сосуд с водой брошен свинцовый шар. Радиус основания цилиндра 6 см, радиус шара 4 см. Насколько поднимется вода в сосуде?
3. Найдите объём шара, заданного уравнение ограничивающей его сферы:
а) $(x-1)^2 + y^2 + (z+3)^2 = 1$.
б) $x^2 - 4x + y^2 + 4y + z^2 - 6z = 8$
13. Как изменится поверхность шара, если: а) его радиус увеличить в 5 раз;
б) Его диаметр уменьшить на 50%;
в) Его объём увеличить 2 раза?

3.26. Площади поверхности призмы, цилиндра, конуса

Теорема 1. *Площадь боков поверхности призмы равна произведению периметра перпендикулярного сечения на длину бокового ребра, т.е.*

$S_{бок} = P_{сеч}\, l$,

Где $P_{сеч}$ - периметр перпендикулярного сечения, а l- длина бокового ребра.

Теорема 2. *Площадь боковой поверхности правильной пирамиды равна половине произведения периметра основания на апофему, т.е.*

$S_{бок} = \frac{1}{2}Ph,$

Где Р- периметр основания, а h- апофема.

Площадь боковой поверхности цилиндра равна произведению длины окружности основания цилиндра на его высоту.

Очевидно , что площадь полной поверхности цилиндра есть $S_{полн} = 2\pi r(r+H)$

Площадь боковой поверхности конуса равна половине произведения длины окружности его основания на длину образующей.

Для полной поверхности конуса получим формулу

$S_{полн} = S_{бок} + S_{осн} = \pi rl + \pi r^2 = \pi r(l+r).$

Упражнения

1. Сколько олифы будет израсходовано на покраску цилиндрической колонны, радиус основания которой равен 0,8 м, а высота 5,5 м, если на покраску 1 $м^2$ расходуется 250г олифы?

Найдем площадь боковой поверхности колонны:

$S_{бок} = 2\pi rH = 2\pi \cdot 0{,}8 \cdot 5{,}5 \approx 28(м^2)$

Отсюда находим общее количество олифы:

$m \approx 28 \cdot 0{,}25 = 7(кг)$.

2. Периметр перпендикулярного сечения призмы P=20 см. Боковое ребро призмы l=20 см. Найти площадь боковой поверхности призмы.

3. Высота конуса равна 10 см, диаметр основания равен 12 см. Найдите площади боковой и полной поверхностей конуса.

4. Паровой котел имеет форму цилиндра, диаметр основания которого 1 м, высота 4,2м. Давление пара в котле равно 10Па. Найдите давление пара на полную поверхность котла.

5. Основанием прямой призмы служит ромб с диагоналями 6 и 8. Найдите полную поверхность призмы ,если высота призмы равна 4.

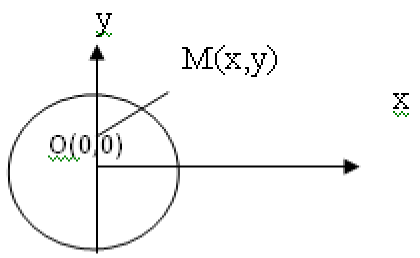
3.27. Кривые второго порядка

Кривая второго порядка имеет вид:

$Ax^2 + 2Bxy \quad + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$, где A,B,C,D,E,F – заданные числа.

1. Окружность.

Опр.5.1. Окружность это множество точек плоскости одинаково удаленных от данной точки, называемой центром окружности.



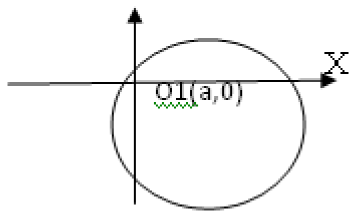
Пусть дана окружность радиуса R с центром в точке O1(a,b), требуется составить уравнение окружности:

Возьмем любую точку M(x,y) на окружности, тогда |O1M|=R – радиус окружности.

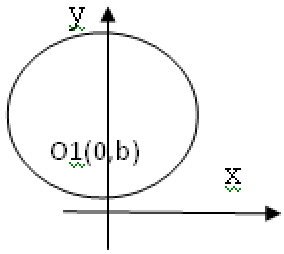
$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = R$ - уравнение окружности с центром в точке O1(a,b), радиусом R.

Частные случаи:

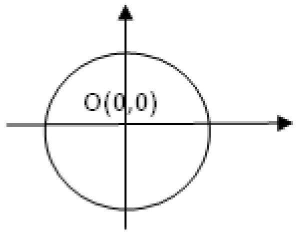
1) Если центр окружности лежит на оси ox => O1(a,0) => уравнение окружности $(x-a)^2 + y^2 = R^2$



Уравнения окружности $x^2+(y-b)^2=R^2$,центр окружности лежит на оси Оу =>О1(0,в);



3)Центр окружности совпадает с начало кардинато О(0;0),
Тогда уравнение окружности $x^2+y^2=R^2$



Пр: Составить уравнение окружности R=5, О1(3;2)
$(x-3)^2+(y-2)^2=25$

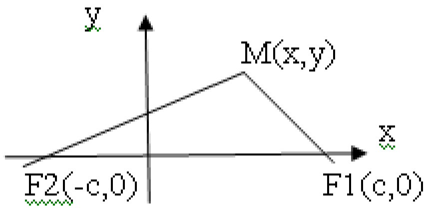
2. Эллипс

Опр5.2. Эллипс - это множество всех точек плоскости, сумма расстояний от каждой из которых до двух данных точек называемых фокусами эллипса, есть постоянное число.

Составить уравнения эллипса:

Пусть F1, F2 – фокусы эллипса
F2O = OF1, F1(c;0), F2(-c;0), F1 F2-2C, M(x;y)

Опр5.3: Расстояния R1=F1M, R2=F2M называют фокальными радиусами точки M.



R1=$\sqrt{(x-c)^2+y^2}$
R2=$\sqrt{(x+c)^2+y^2}$
R1*R2=2a, тогда каноническое уравнения эллипса имеет вид,
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ каноническое уравнения эллипса.

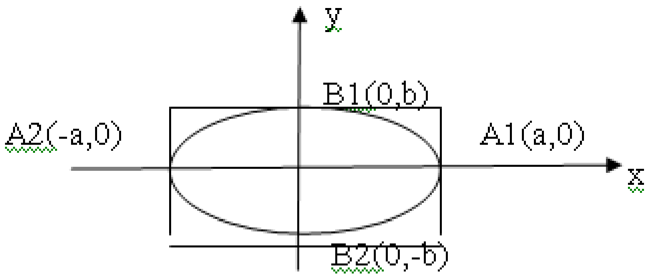
Построим эллипс
1) Найдем точки пересечения эллипса с осями координатной

Ox : $\frac{x^2}{a^2}=1$ Oy: $\frac{y^2}{b^2}=1$

$x^2 = a^2$ $\qquad\qquad$ $y^2 = b^2$

$x = \pm a$ $\qquad\qquad$ $y = \pm b$

2)т.к x и y входят в уравнения эллипса в четных степенях, то эллипс симметричен относительно осей координат.



Опр.5.4: Точки А1, А2 В1, В2 пересечения эллипса с осями координат называется вершинами эллипса.

Опр. 5.5 отрезок $A_1A_2 = 2a$ наз. большой осью эллипса, а отрезок $B_1B_2 = 2b$ - малой осью эллипса.

Фокус эллипса, большая и малая ось связанна между собой следующим уравнением:

$c^2 = a^2 + b^2$, где с – координаты фокуса,

а – длина большой оси,

в – длина малой оси

Пример. Определить длины осей и координаты фокуса

$$9x^2 + 4y^2 = 36$$

$$\frac{9x^2}{36} + \frac{4y^2}{36} = \frac{36}{36} \to \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1 \to a^2 = 4 \to a = 2$$

$$b^2 = 9 \to b = 3$$

$$c^2 = 2^2 + 3^2 = 13 \Rightarrow c = \sqrt{13}$$

2. Гипербола

Опр.5.6 Гиперболой называется геометрическое место точек на плоскости, для которых модуль разности расстояний до двух фиксированных Точек A_1 и A_2 называемыми фокусами, есть величина постоянная, положительная и меньшая чем расстояние между фокусами.

Каноническое уравнение гиперболы имеет вид:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

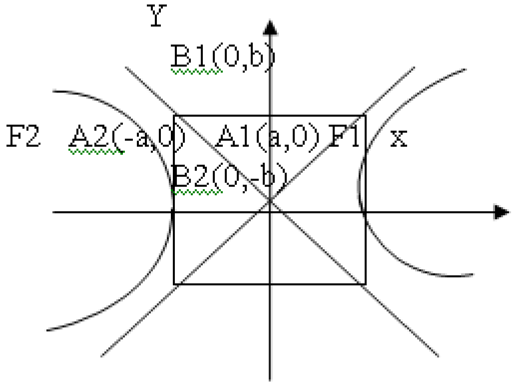
Построим гиперболу, если L1 и L2 – асимптоты гиперболы:

$l_1 : \frac{b}{a} \cdot x = y$ $\qquad\qquad$ $l_2 : -\frac{b}{a} \cdot x = y$

$F_1(c,0), F_2(-c,0), c^2 = a^2 + b^2$

Ох – действительная ось, оу – мнимая ось.

Опр.5.7. Отношение расстояний между фокусами гиперболы к длине оси называется эксцентриситетом гиперболы. $E = \frac{2c}{2a}$.



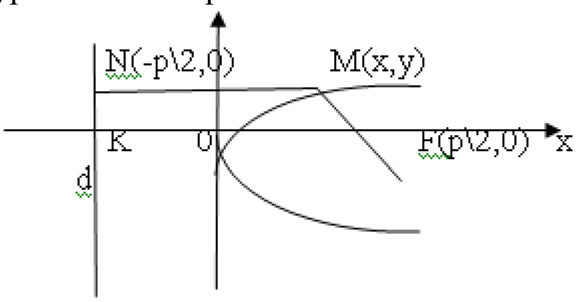
4. Парабола.

Опр. 5.8. Параболой называется множество всех точек плоскости, каждая из которых одинаково удалена от данной точки, называемой фокусом параболы и от данной прямой, не проходящей через эту точку и называемой директрисой параболы.

Фокус в точке F(F/2;0) и директрисой d: x=-p/2.

Опр.5.9: Расстояние от фокуса F до директрисы параболы называется параметром параболы и обозначается p, p>0.

y^2=2px – каноническое уравнение параболы



Построение кривых 2-го порядка

1. Построить окружность: 1) $(x* 2)^2 +(y+3)^2 =25$.
2. Составить уравнение окружности с центром в точки O1, проходящим через точку A, если O1 (2;-3), A (5;1).

3.Составить уравнение окружнрости, если концы диаметра имеют координаты A(3;9); B(7;3)

4.Составить каноническое уравнение эллипса, если даны его вершины B1(0;3) , B2(0;-3), F1*F2=2C=8

5.Составить каноническое уравнение гиперболы, если a =12, в=5

6.Составить уравнение параболы с вершиной в начале координат, если парабола расположена справа от оси OX и p=5.

7.Построить параболу x^2=8*y.